

ANNALEN DER PHYSIK

GEGRÜNDET 1799 DURCH F. A. C. GREN
UND FORTGEFÜHRT DURCH L. W. GILBERT,
J. C. POGGENDORFF, G. u. E. WIEDEMANN,
P. DRUDE

VIERTE FOLGE
BAND 77 HEFT 8
DER GANZEN REIHE 382. BANDES 8. HEFT

KURATORIUM:
M. PLANCK, E. WARBURG

UNTER MITWIRKUNG
DER DEUTSCHEN PHYSIKALISCHEN GESELLSCHAFT
HERAUSGEGEBEN VON

W. WIEN UND M. PLANCK



LEIPZIG

VERLAG VON JOHANN AMBROSIOUS BARTH

Bestellungen auf die „Annalen“ werden von allen Buchhandlungen und der Verlagsbuchhandlung entgegengenommen. Im Jahre 1925 erscheinen die Bände 76, 77 und 78 à 8 Hefte. Der Abonnementspreis beträgt pro Band Rm. 20.— zuzüglich Rm. —.80 für Porto bei direkter Zusendung für das Inland und Rm. 1.60 für das Ausland.

Ausgegeben im Oktober 1925.

Inhalt.

	Seite
1. Johannes Picht. Über den Schwingungsvorgang, der einem beliebigen (astigmatischen) Strahlenbündel entspricht	685

Die Redaktion der Annalen wird von den umseitig genannten Herren besorgt. Den geschäftlichen Teil hat Herr **Geh. Hofrat Prof. W. Wien** übernommen, an den auch Manuskripte zu senden sind. Seine Adresse ist: **München, Kolberger Straße 16.**

Es wird gebeten, die Manuskripte **druckfertig** einzuliefern und in den Korrekturen den beim Druck für sie verwendeten Raum nicht zu überschreiten.

Für die Aufnahme von Dissertationen gelten besondere Bedingungen, welche vom Verlag bekannt gegeben werden.

Die Verlagsbuchhandlung liefert 100 **Sonderabdrücke** jeder Arbeit kostenfrei. Falls ausnahmsweise mehr gewünscht werden, so muß dies bei Rücksendung des ersten Korrekturbogens an die Druckerei auf dessen erster Seite bemerkt werden. Alle anderen, die Sonderabdrücke betreffenden Mitteilungen bittet man an die Verlagsbuchhandlung zu richten.

Mitglieder der Deutschen Physikalischen Gesellschaft können die Annalen zu einem Vorzugspreis beziehen.

Anderweitiger Abdruck der für die Annalen bestimmten Abhandlungen oder Übersetzung derselben innerhalb der gesetzlichen Schutzfrist ist nur mit Genehmigung der Redaktion und Verlagsbuchhandlung gestattet.

Die **Zeichnungen** sind in möglichst sorgfältiger Ausführung den Abhandlungen auf besonderen Blättern beizulegen (nicht in das Manuskript selbst einzuzichnen). Da die Figuren fortan möglichst in den Text eingefügt werden sollen, ist die Stelle des Manuskriptes recht genau anzugeben, wo sie hingehören.

Zitate sind am Rande oder unten auf den Seiten des Manuskriptes (nicht in dem Text selbst) und zwar möglichst in der in den „Fortschritten der Physik“ üblichen Form mit Angabe des Namens und Vornamens, der Band-, Seiten- und Jahreszahl aufzuführen.



stre
für
d. l.
lini

den
Kn
nat
ger
das
lier
so

(1)

wo
räu
vor
wir

zeit
Wi
Am
Pre
get

Art

ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 77.

1. *Über den Schwingungsvorgang,
der einem beliebigen (astigmatischen)
Strahlenbündel entspricht¹⁾;
von Johannes Picht.*

Einleitung.

In den Annalen der Physik hat Debye²⁾ mathematisch strenge Lösungen der Schwingungsgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$ für einen räumlichen und einen ebenen Strahlenkegel gegeben, d. h. für die Fälle, in denen ein Brennpunkt bzw. eine Brennnlinie auftritt.³⁾

Der Grundgedanke der Debyeschen Arbeit ist folgender: der das Lichtbündel begrenzende Schirm wird in unendliche Entfernung gelegt. Hier lassen sich mit hinreichender Genauigkeit die Oberflächenwerte der der Schwingungsgleichung genügenden Funktion u richtig angeben. Es wird nunmehr das Huyghenssche Prinzip in der Kirchhoffschen Formulierung angewandt (vgl. § 1). Für die Kugelwelle ergibt sich so für den Wert u_P der Funktion u im Aufpunkte P

$$(1) \quad u_P = \frac{ik}{2\pi} \cdot \int e^{ik(x_P \cos \alpha + y_P \cos \beta + z_P \cos \gamma)} d\Omega,$$

wo x_P, y_P, z_P die Koordinaten des Aufpunktes P , Ω der räumliche Öffnungswinkel des Strahlenkegels und α, β, γ die von x_P, y_P, z_P unabhängigen, von Ω abhängigen Richtungswinkel des vom Koordinatenursprungspunkte, dem Brenn-

1) Auszug aus der Berliner Inaugural-Dissertation 1925 und gleichzeitig Erweiterung meiner von der philosophischen Fakultät der Friedrich-Wilhelms-Universität zu Berlin am 3. August 1924 preisgekrönten Arbeit. Am 30. Oktober 1924 durch Hrn. Professor Dr. M. v. Laue in der Preussischen Akademie der Wissenschaften, Berlin, auszugsweise vortragen.

2) Ann. d. Phys. (4) 30. S. 755. 1909.

3) Vgl. auch M. v. Laue, Wellenoptik, Enc. d. math. Wiss. 5, 3, Artikel 41 (S. 439).

punkte des Strahlenbündels, ausgehenden Fahrstrahls nach dem Oberflächenelement $d\sigma$ der Einheitskugel sind.

Für das ebene Strahlenbündel, das in einem Brennpunkte konvergiert, — räumlich betrachtet: für die Kreiszyliinderwelle, die in einer geraden Brennnlinie konvergiert, — erhält Debye den Ausdruck

$$(2) \quad u_P = \frac{i}{2} \int e^{ik(x_P \cos \alpha + y_P \sin \alpha)} d\alpha.$$

Außerdem gibt Debye noch die Formel

$$(3) \quad u_P = \frac{1}{\pi} \cdot \int e^{ik[r_P' \cdot \cos(\varphi_P' - \varphi) + s^*]} d\varphi,$$

die für ein ebenes Strahlenbündel gilt, das nicht einen Brennpunkt, sondern eine in der betreffenden Ebene liegende Brennnlinie, eine sogenannte Kaustik, besitzt (vgl. § 4).

Im Anschluß an die genannte Arbeit von Debye soll eine strenge Lösung der Schwingungsgleichung für ein beliebiges astigmatisches Strahlenbündel gesucht werden.

Die im Aufpunkte P vorhandene Lichtintensität ist in allen Fällen dem Quadrat von u_P proportional gesetzt, eine Annäherung, die in § 9 durch Übergang von u_P zu den Feldvektoren \mathcal{E} und \mathcal{H} näher begründet wird.

Nachdem die vorliegende Arbeit in ihrem wesentlichsten Teile fertiggestellt war, erschien eine Arbeit von J. Fischer¹⁾, in der die von Debye gegebene Formel (3) nochmals abgeleitet wird und sodann das hier auftretende Integral für den speziellen Fall, daß die Brennnlinie (Kaustik) des Strahlenbündels Evolute einer Parabel ist, nach der Methode der Sattelpunkte²⁾ ausgewertet wird.³⁾

1) Ann. d. Phys. (4) 72. S. 353. 1923 (Münchener Dissertation).

2) Vgl. L. Brillouin, Ann. scient. de l'école norm. sup. I. 83. S. 17, 1916; ferner auch: B. Riemann, Ges. math. Werke, S. 400, Leipzig 1876; P. Debye, Math. Ann. 67. S. 535, 1909; Sitzungsber. d. bayr. Akad. d. Wiss. 1910. S. 3.

3) Vgl. zu dem Thema der vorliegenden Arbeit außer der bei J. Fischer u. P. Debye genannten Literatur noch: R. Straubel, Theorie der Beugungserscheinungen kreisförmig begrenzter, symmetrischer, nichtsphärischer Wellen, Habilitationsschrift München 1893 und J. Wilsing, Über den Einfluß der sphärischen Abweichungen der Wellenfläche auf die Lichtstärke von Fernrohrobjectiven (Publ. d. Astrophys. Observ., Potsdam 15. St. 4, 1903).

§ 1.

Ein unendlich schmales Strahlenbündel hat als Kaustik zwei (gerade) Brennnlinien in zwei zueinander senkrechten Ebenen durch den Mittelstrahl. Der Winkel zwischen diesem Strahl und den beiden ausgearteten Kaustiken kann verschiedene Werte annehmen. Wir behandeln zunächst den einfachsten Fall, daß beide Kaustiken auf dem Mittelstrahl senkrecht stehen, und betrachten zu diesem Zwecke ein Strahlenbündel, dessen Wellenfläche (Fläche gleicher Phase) gegeben ist durch die Gleichung

$$(1) \quad \sqrt{[V(x+a)^2 + y^2 - 2a]^2 + z^2} + a = R,$$

wo x, y, z kartesische Koordinaten sind.

Die durch Gleichung (1) dargestellte Fläche ist eine Rotationsfläche, die entsteht, wenn man den Kreisbogen

$$(x-a)^2 + z^2 = (R-a)^2$$

der xz -Ebene, dessen Radius gleich $(R-a)$ und dessen Mittelpunkt der Punkt $(+a, 0, 0)$ ist, um die Gerade ($y=0$; $z=-a$) rotieren läßt. Sie genügt der Eikonalgleichung¹⁾, d. h. es ist

$$\left(\frac{\partial R}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial R}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial R}{\partial z}\right)^2 = \text{const}(=1).$$

Die Flächenschar (1) ist also eine im Sinne der geometrischen Optik mögliche Schar von Wellenflächen. Sie entspricht einer astigmatischen Welle (— im engeren Sinne —), d. h. einem räumlichen Strahlenbündel, das in zwei Brennnlinien konvergiert. Die Rotationsgerade bildet die eine (zur z -Achse parallele) Brennnlinie, während der vom Mittelpunkt $(+a, 0, 0)$ des rotierenden Kreises beschriebene Kreisbogen²⁾ der anderen (in der xy -Ebene liegenden) Brennnlinie entspricht, die bei kleinem Öffnungswinkel des Strahlenbündels gleichfalls (in erster Näherung) als Gerade aufgefaßt werden kann und der y -Achse parallel läuft. Die beiden Brennnlinien des Strahlenbündels schneiden also die x -Achse des Koordinatensystems

1) Vgl. H. Bruns, Abhdlg. d. Königl. sächs. Ges. d. Wiss. Leipzig, Math.-phys. Kl. 21, S. 325. 1895 und Sommerfeld und J. Runge, Ann. d. Phys. (4) 35, S. 277, 1911, wo eine Ableitung der Eikonalgleichung nach Debye wiedergegeben wird.

2) $(x+a)^2 + y^2 = 4a^2$; $z = 0$.

— die mit der Achse des Strahlenbündels zusammenfällt — in den Punkten $(-a, 0, 0)$ bzw. $(+a, 0, 0)$, d. h. der Ursprungspunkt des Koordinatensystems ist in der Mitte zwischen diesen Schnittpunkten angenommen. Der Abstand der beiden

Brennlinien ist gleich $2a$ (Fig. 1).

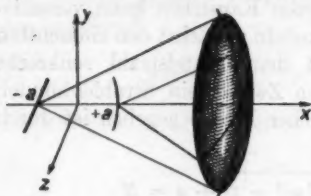


Fig. 1.

Eine astigmatische Welle, für welche die durch Gleichung (1) gegebene Fläche Wellenfläche, d. h. Fläche gleicher Phase ist, wird gekennzeichnet durch die Gleichung

$$(2) \quad u = e^{ik \cdot \varphi(R)} \cdot f(x, y, z); \quad k = \frac{2\pi}{\lambda},$$

wo $f(x, y, z)$ keinen variablen Phasenfaktor mehr enthält und so zu bestimmen ist, daß

$$(3) \quad \Delta u + k^2 u = 0$$

wird. In der Funktion $\varphi(R)$ treten die Variablen x, y, z nur in der durch Gleichung (1) gegebenen Verbindung auf. Schreiben wir in (2) statt $e^{ik \cdot \varphi(R)}$ einfacher e^{ikR} , setzen also $\varphi(R) = R$, und stellen wir sodann die aus (2) und (3) folgende Differentialgleichung auf, so erkennen wir, daß angenommen werden darf, daß in $f(x, y, z)$ die Koordinaten x und y nur in der Verbindung $\sqrt{(x+a)^2 + y^2} = \bar{\rho}$ auftreten, daß also $f(x, y, z) = g(\bar{\rho}, z)$ gesetzt werden darf. Wir erhalten so als Lösung der Schwingungsgleichung (3) die Funktion

$$u = e^{ikR} \cdot g(\bar{\rho}, z),$$

wo $g(\bar{\rho}, z)$ als Lösung der partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\frac{\partial^2 g}{\partial \bar{\rho}^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial z^2} + \frac{\partial g}{\partial \bar{\rho}} \left(\frac{1}{\bar{\rho}} + 2ik \cdot \frac{\bar{\rho} - 2a}{R - a} \right) + \frac{\partial g}{\partial z} \cdot \frac{2ikz}{R - a} + g(\bar{\rho}, z) \cdot \frac{2ik}{R - a} \cdot \left(1 - \frac{a}{\bar{\rho}} \right) = 0$$

$$R - a = \sqrt{(\bar{\rho} - 2a)^2 + z^2}; \quad \bar{\rho} = \sqrt{(x+a)^2 + y^2}$$

zu bestimmen ist.

Wir betrachten nur solche Strahlenbündel, bei denen der Achsenwinkel der Lichtstrahlen (im Sinne der geometrischen

Optik) kleiner als $\pi/2$ bleibt, d. h. wir wollen für das einfallende Strahlenbündel $\bar{\varrho} \neq 0$ voraussetzen. Dann können wir für sehr große Werte von R , also auf der unendlich fernen Wellenfläche (1), als Lösung von (3) ansetzen:

$$(4) \quad u = \frac{e^{ikR}}{R},$$

denn es wird hierfür ohne jede Vernachlässigung

$$\Delta u + k^2 u = \frac{e^{ikR}}{R} \cdot \left(ik - \frac{1}{R} \right) \cdot \frac{2a}{R-a} \cdot \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{\bar{\varrho}} \right).$$

Wollen wir zum Ausdruck bringen, daß unser astigmatisches Strahlenbündel zwei die Achse in den Punkten $(+a, 0, 0)$ bzw. $(-a, 0, 0)$ schneidende Brennpunkte besitzt, so hätten wir statt (4) auch als Lösung von (3) für große Werte von R ansetzen können:¹⁾

$$u = \frac{e^{ikR}}{\sqrt{R^2 - a^2}}.$$

Hierfür wird ohne jede Vernachlässigung

$$\begin{aligned} \Delta u + k^2 u = \frac{e^{ikR}}{\sqrt{R^2 - a^2}} \cdot \left\{ \frac{2ika}{R-a} \cdot \left(\frac{1}{R+a} - \frac{1}{\bar{\varrho}} \right) \right. \\ \left. + \frac{2Ra}{(R^2 - a^2)^{3/2}} \cdot \left(\frac{a}{2R} - 1 + \frac{R+a}{\bar{\varrho}} \right) \right\}. \end{aligned}$$

Dies geht für wenig geöffnete Strahlenbündel über in

$$\Delta u + k^2 u = \frac{e^{ikR}}{\sqrt{R^2 - a^2}} \cdot \frac{a^3}{(R^2 - a^2)^{3/2}},$$

da in diesem Falle $\bar{\varrho}$ annähernd gleich $R + a$ wird.

Welchen der beiden angegebenen Werte von u wir auf der unendlich fernen Wellenfläche als Lösung der Schwingungsgleichung (3) annehmen, ist für das folgende Lösungsverfahren unwesentlich, so daß wir (4) zugrunde legen werden.

Wir nehmen nun die unendlich ferne Wellenfläche (1) von einem undurchsichtigen Schirme bedeckt an bis auf den Teil, der der Öffnung unseres Strahlenbündels (im Sinne der geometrischen Optik) entspricht. Diesen Teil denken wir uns von außen mit einer nach den beiden oben angegebenen Brennpunkten konvergierenden astigmatischen Welle beleuchtet. Um

1) Siehe den vorletzten Absatz des § 12 dieser Arbeit.

den Wert u_P der Funktion u in dem innen liegenden Aufpunkte P zu erhalten, wenden wir die aus dem Greenschen Satze

$$-\int \left(U \cdot \frac{\partial V}{\partial \nu} - V \cdot \frac{\partial U}{\partial \nu} \right) d\sigma = \int (U \cdot \Delta V - V \cdot \Delta U) d\tau$$

folgende Formel

$$(5) \quad u_P = \frac{1}{4\pi} \cdot \int \left\{ u \cdot \frac{\partial}{\partial \nu} \left(\frac{e^{-ikr}}{r} \right) - \frac{e^{-ikr}}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial \nu} \right\} d\sigma$$

an, worin ν die nach innen weisende Normale der Begrenzungsfläche, u und $\partial u / \partial \nu$ die Oberflächenwerte bzw. deren nach der inneren Normalen genommenen Ableitungen der der Schwingungsgleichung (3) genügenden Funktion, $d\sigma$ das Flächenelement der Begrenzungsfläche, r den Fahrstrahl vom Aufpunkte P nach $d\sigma$ und u_P den Wert der Funktion u im Aufpunkte P bezeichnet.

Um die Ableitung nach der inneren Normalen der Wellenfläche (Begrenzungsfläche) zu bilden, transformieren wir die in

$$u = \frac{e^{ikR}}{R} \quad \text{und} \quad \frac{e^{-ikr}}{r}$$

auf tretenden unabhängigen Variablen x, y, z in drei neue Variablen R, v, w , die so beschaffen sind, daß beim Fortschreiten längs der Normalen der Wellenfläche nur eine von ihnen ihren Wert ändert, die beiden anderen aber unverändert bleiben. Die festen Koordinaten x_P, y_P, z_P des Aufpunktes transformieren wir nicht, da dies die Wahl der R, v, w bzw. ihren Zusammenhang mit den kartesischen Koordinaten x, y, z erschweren würde und es überdies nicht erforderlich ist. Wir setzen:

$$(6) \quad \begin{cases} x = [(R-a) \cdot \cos w + 2a] \cdot \cos v - a & (-\infty < R < +\infty) \\ y = [(R-a) \cdot \cos w + 2a] \cdot \sin v & \left(-\frac{\pi}{2} < v < +\frac{\pi}{2} \right) \\ z = (R-a) \cdot \sin w & \left(-\frac{\pi}{2} < w < +\frac{\pi}{2} \right) \end{cases}$$

oder, nach R, v, w aufgelöst:

$$(7) \quad \begin{cases} R = \pm \sqrt{[\pm \sqrt{(x+a)^2 + y^2 - 2a}]^2 + z^2 + a} \\ v = \arctg \frac{y}{x+a} \\ w = \arctg \frac{z}{\pm \sqrt{(x+a)^2 + y^2 - 2a}} \end{cases}$$

Für die Punkte der unendlich fernen Wellenfläche sind die Wurzeln positiv zu nehmen, wenn wir voraussetzen, daß der Ausschnitt auf ihr nur solche Punkte umfaßt, für welche $x > a$ ist. Diese einschränkende Bedingung besagt nur, daß der Achsenwinkel des Strahlenkegels nicht größer als $\pi/2$ ist, eine Forderung, die wir bereits oben vorausgesetzt haben. Die Koordinaten R , v , w seien als Wulstkoordinaten bezeichnet¹⁾ (Fig. 2).²⁾

Schreitet man von der Begrenzungsfläche in Richtung der nach innen weisenden Normalen fort, so ändert sich nur der Wert von R , während v und w unverändert bleiben, so daß

$$\frac{\partial}{\partial v} = - \frac{\partial}{\partial R}$$

wird. Da auf der unendlich fernen Wellenfläche

1) Die Schwingungsgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$ lautet in diesen Wulstkoordinaten

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial R^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial v^2} \cdot \frac{1}{[(R-a)\cos w + 2a]^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial w^2} \cdot \frac{1}{(R-a)^2} \\ + \frac{\partial u}{\partial R} \cdot \frac{2}{R-a} \cdot \left(1 - \frac{a}{(R-a)\cos w + 2a}\right) \\ - \frac{\partial u}{\partial w} \cdot \frac{\sin w}{(R-a)[(R-a)\cos w + 2a]} + k^2 u = 0. \end{aligned}$$

Hieraus folgt, daß u als von v unabhängig angenommen werden kann, also $\partial^2 u / \partial v^2 = 0$. Vernachlässigen wir wegen $R \rightarrow \infty$ und $\cos w \neq 0$

das Glied $\frac{a}{(R-a)\cos w + 2a}$ gegen 1, so kann u auch als von w unabhängig angenommen werden, so daß wir so die gewöhnliche Differentialgleichung erhalten

$$\frac{d^2 u}{dR^2} + \frac{2}{R-a} \cdot \frac{du}{dR} + k^2 u = 0.$$

Als Lösung dieser Gleichung ergibt sich $u = \frac{e^{ik(R-a)}}{R-a} \approx \frac{e^{ikR}}{R} e^{-ika}$.

Hierfür wird

$$\Delta u + k^2 u = - \frac{e^{ik(R-a)}}{R-a} \left(ik - \frac{1}{R-a} \right) \cdot \frac{2a}{R-a} \cdot \frac{1}{\bar{q}},$$

wenn $\bar{q} = \sqrt{(x+a)^2 + y^2}$.

2) Die Flächen $R = \text{const}$ sind die Wellenflächen des Strahlenbündels; die Flächen $v = \text{const}$ bilden eine Schar von Ebenen, die sich in der einen Brennpunktlinie $x = -a$; $y = 0$ schneiden; die Flächen $w = \text{const}$ entsprechen (einem Teile) der Mantelfläche von Doppelkegeln, die sich alle in der (anderen) Brennpunktlinie $(x+a)^2 + y^2 = 4a^2$; $z = 0$ schneiden, und deren Spitzen auf der Brennpunktlinie $x = -a$; $y = 0$ liegen. Diese bildet also die Achse aller Doppelkegel $w = \text{const}$.

$$(8) \quad u = \frac{e^{ikR}}{R}$$

war, so wird bis auf Glieder von der Größenordnung R^{-2}

$$(9) \quad \frac{\partial u}{\partial v} = -\frac{\partial u}{\partial R} = -ik \cdot \frac{e^{ikR}}{R}.$$

Für die Entfernung r des Aufpunktes $P = (x_P, y_P, z_P)$ vom Oberflächenelement $d\sigma = (x, y, z) = (R, v, w)$ ergibt sich

$$r = \sqrt{(x - x_P)^2 + (y - y_P)^2 + (z - z_P)^2}.$$

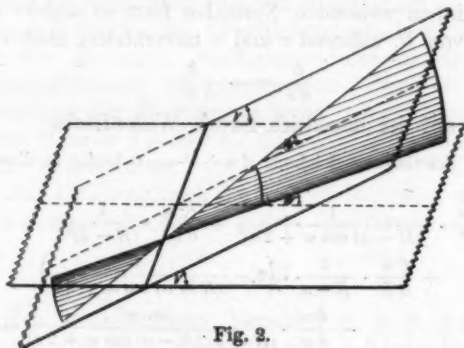


Fig. 2.

Ersetzen wir hierin die Werte x, y, z durch die aus (6) folgenden Werte R, v, w , so ergibt sich in gleicher Näherung wie oben, d. h. bis auf Glieder von der Größenordnung R^{-2} :

$$r = R - \{x_P \cdot \cos v \cdot \cos w + y_P \cdot \sin v \cdot \cos w + z_P \cdot \sin w + a - 2a \cdot \cos w + a \cdot \cos v \cdot \cos w\},$$

so daß

$$(10) \quad \frac{e^{-ikr}}{r} = \frac{e^{-ikR}}{R} \cdot e^{ik[(x_P + a) \cdot \cos v \cos w + y_P \cdot \sin v \cos w + z_P \cdot \sin w - 2a \cdot \cos w]} \cdot e^{ika}$$

und

$$(11) \quad \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{e^{-ikr}}{r} \right) = ik \cdot \frac{e^{-ikR}}{R} \cdot e^{ik[(x_P + a) \cdot \cos v \cos w + y_P \cdot \sin v \cos w + z_P \cdot \sin w - 2a \cdot \cos w]} \cdot e^{ika} \cdot$$

Setzen wir nun in Gleichung (5) die in (8), (9), (10), (11) angegebenen Werte ein, so erhalten wir nach einigen Vereinfachungen:

$$u_P = \frac{ik}{2\pi} \cdot e^{ika} \cdot \int e^{ik[(x_P + a) \cos v \cos w + y_P \sin v \cos w + z_P \sin w - 2a \cdot \cos w]} d\Omega,$$

wenn wir für $d\sigma/R^2$ wegen $R \rightarrow \infty$ das Element $d\Omega$ des Öffnungswinkels setzen.

Beachten wir, daß bei Benutzung der Wulstkoordinaten sich für das Flächenelement $d\sigma$ der Wert ergibt:

$$d\sigma = dv \cdot dw \cdot (R - a) \cdot [(R - a) \cdot \cos w + 2a],$$

so können wir wegen $R \rightarrow \infty$ für $d\sigma/R^2$ auch schreiben:

$$\frac{d\sigma}{R^2} = d\Omega = \cos w \, dv \, dw$$

und erhalten so, wenn wir noch den konstanten Phasenfaktor $e^{ik a}$ vernachlässigen, für den Wert u_P der Funktion u im Aufpunkte P :

$$(12) \quad u_P = \frac{ik}{2\pi} \cdot \iint e^{ik[(x_P+a) \cdot \cos v \cos w + y_P \cdot \sin v \cos w + z_P \cdot \sin w - 2a \cdot \cos w]} \cos w \, dv \, dw,$$

wo das Doppelintegral über den der ganzen Öffnung des unendlich fernen Schirmes entsprechenden Bereich zu erstrecken ist, also etwa von $-V$ bis $+V$ und von $-W$ bis $+W$.¹⁾

Lassen wir in (12) den Aufpunkt $P = (x_P, y_P, z_P)$ variieren, so stellt $u_P = u(x_P, y_P, z_P)$ eine strenge Lösung der Schwingungsgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$ für ein durch (1) gekennzeichnetes astigmatisches Strahlenbündel dar, da ja wegen

$$\cos^2 v \cdot \cos^2 w + \sin^2 v \cdot \cos^2 w + \sin^2 w = 1$$

der Integrand selbst der Schwingungsgleichung genügt.

Führen wir in (12) neue Integrationsvariable ein durch die Beziehungen:

$$\sin w = \sin \vartheta \sin \varphi; \quad \cos w = \sqrt{1 - \sin^2 \vartheta \sin^2 \varphi}$$

$$\sin v = \frac{\sin \vartheta \cos \varphi}{\sqrt{1 - \sin^2 \vartheta \sin^2 \varphi}}; \quad \cos v = \frac{\cos \vartheta}{\sqrt{1 - \sin^2 \vartheta \sin^2 \varphi}},$$

so ergibt sich wegen

$$\left| \begin{array}{cc} \frac{\partial w}{\partial \varphi} & \frac{\partial v}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial w}{\partial \vartheta} & \frac{\partial v}{\partial \vartheta} \end{array} \right| = \frac{\sin \vartheta}{\sqrt{1 - \sin^2 \vartheta \sin^2 \varphi}},$$

$$(13) \quad u_P = \frac{ik}{2\pi} \cdot \iint e^{ik[(x_P+a) \cos \vartheta + y_P \sin \vartheta \cos \varphi + z_P \sin \vartheta \sin \varphi - 2a \sqrt{1 - \sin^2 \vartheta \sin^2 \varphi}]} \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi$$

1) Diese Bemerkung betreffend den Integrationsbereich gilt auch für die späteren Formeln, so daß sie nicht besonders wiederholt ist.

zu integrieren über die Öffnung¹⁾, also etwa über $0 \leq \vartheta \leq \Theta$ und $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, falls die Randstrahlen den Winkel Θ mit der Achse des Bündels bilden.

Für $a = 0$ geht die durch Gleichung (1) gegebene Wellenfläche, die der Herleitung der Formeln (12) und (13) zugrunde lag, in eine Kugelfläche über, die astigmatische Welle also in eine Kugelwelle. Setzen wir demnach in (12) bzw. (13) $a = 0$, so müssen diese Formeln in die für Kugelwellen gültigen Ausdrücke übergehen. Wir erhalten so z. B. aus (13):

$$u_P = \frac{ik}{2\pi} \cdot \iint e^{ik[x_P \cos \vartheta + y_P \sin \vartheta \cos \varphi + z_P \sin \vartheta \sin \varphi]} \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi.$$

Daß dieser Wert von u_P mit dem von Debye für Kugelwellen angegebenen übereinstimmt, erkennt man sofort, wenn man die kartesischen Koordinaten des Aufpunktes durch seine Polarkoordinaten ersetzt oder die Integrationsvariablen ϑ, φ den Transformationsgleichungen

$$\begin{aligned} \cos \vartheta &= \cos \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \beta - \cos^2 \gamma} \\ \sin \vartheta \cos \varphi &= \cos \beta \\ \sin \vartheta \sin \varphi &= \cos \gamma \end{aligned}$$

unterwirft.

Den etwas allgemeineren Fall, daß nur eine der beiden Brennlinien des unendlich schmalen astigmatischen Strahlenbündels auf dem Mittelstrahl senkrecht steht²⁾, erhält man sofort, wenn man den unendlich kleinen Integrationsbereich von w in (12) nicht in der Nähe des Wertes $w = 0$, sondern eines anderen Wertes $w = w_0$ wählt.

§ 2.

Wir wollen nunmehr von der im vorigen Paragraphen behandelten astigmatischen Welle zur Zylinderwelle übergehen, die wir ja als eine astigmatische Welle auffassen können, bei

1) Vgl. die diesbezügliche Bemerkung zu (12) sowie vorstehende Anmerkung.

2) Nach M. Dufour, Compt. rend. 174. S. 288/289. 1922 ist dies — im Gebiete der Seidelschen Approximationen — der allgemeine Fall, der einem gegen die Achse eines optischzentrierten Systems geneigten Büschel nach dem Durchgang durch das System entspricht. Man erkennt dies auch leicht auf Grund der in § 10 durchgeführten Betrachtungen, wenn wir dort aus der einem rotationssymmetrischen Strahlenbündel entsprechenden Kaustik und den zugehörigen Strahlen ein zur Symmetrieachse schiefes, unendlich schmales Strahlenbündel herausgreifen.

der die eine der beiden Brennnlinien im Unendlichen liegt. Wir setzen zunächst in (12) des vorigen Paragraphen

Wir erhalten $x_P + a = \xi_P$; $y_P = \eta$; $z_P = \zeta_P$.

$$u_P = \frac{ik}{2\pi} \cdot e^{2ika} \cdot \iint e^{ik[\xi_P \cos v \cos w + \eta_P \sin v \cos w + \zeta_P \sin w + 2a(1 - \cos w)]} \cos w \, dv \, dw.$$

Wir lassen nun a über alle Grenzen wachsen und gleichzeitig w so abnehmen, daß

$$ka(1 - \cos w) \ll 1$$

wird.

Es ergibt sich dann:

$$u_P = \frac{ik}{2\pi} \cdot e^{2ika} \cdot dw \cdot \int e^{ik[\xi_P \cdot \cos v + \eta_P \cdot \sin v]} dv.$$

Dieser Wert entspricht dem von Debye für die Zylinderwelle angegebenen Ausdruck. Das Differential dw weist darauf hin, daß diese Welle gegenüber einer gewöhnlichen astigmatischen Welle, deren beide Brennnlinien im Endlichen liegen, unendlich schwach ist, falls für beide im Unendlichen die Lichtintensität von gleicher Größenordnung angenommen wird.

§ 3.

Wir wollen jetzt ein *beliebiges* Strahlenbündel betrachten und für dieses die Integraldarstellung suchen. Da die geometrisch-optischen Wellenflächen als Flächen gleicher Phase Parallellflächen sind, so ist das Strahlenbündel durch eine von ihnen eindeutig bestimmt. Wir wollen nun voraussetzen, daß die Kaustik ganz im Endlichen liegt oder sich nur nach einer Seite in das Unendliche erstreckt. Diese Voraussetzung wird fast immer erfüllt sein. (Ist sie nicht erfüllt, so gelten die nachfolgenden Überlegungen in ihren wesentlichsten Teilen gleichfalls. Es ergeben sich nur an einigen Stellen bei der Diskussion gewisse Modifikationen.) Wir wählen nun eine der im Endlichen liegenden Wellenflächen so, daß die Kaustik ganz auf der einen Seite von ihr liegt.¹⁾ Sie sei in Abhängigkeit von zwei Parametern v und w gegeben durch die Gleichungen

$$x = x(v, w); \quad y = y(v, w); \quad z = z(v, w).$$

oder vektoriell geschrieben, wenn \mathbf{r} den zu den einzelnen Punkten der ausgewählten Wellenfläche gehörigen Radiusvektor bedeutet:

$$(1) \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}(v, w).$$

1) Vgl. § 10. Diese Wahl bringt gewisse Vereinfachungen mit sich.

Da durch die Fläche $\xi = \xi(v, w)$ unser Strahlenbündel eindeutig gekennzeichnet ist, so sei sie im Folgenden als „Kennfläche“ bezeichnet. Ihre Normale sei \mathfrak{N} . Es ist

$$(2) \quad \mathfrak{N} = \mathfrak{N}(v, w) = \frac{\begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial v} & \frac{\partial \xi}{\partial w} \end{bmatrix}}{\sqrt{\left[\frac{\partial \xi}{\partial v} \quad \frac{\partial \xi}{\partial w} \right]^2}} = \frac{[\xi_v \ \xi_w]}{\sqrt{[\xi_v \ \xi_w]^2}}.$$

Die einzelnen Wellenflächen (— im geometrisch-optischen Sinne —) unseres Strahlenbündels lassen sich als Parallelflächen darstellen durch

$$(3) \quad \xi^* = \xi^*(v, w, R^*) = \xi(v, w) + R^* \cdot \mathfrak{N}(v, w),$$

wenn ξ^* den Radiusvektor nach den einzelnen Punkten der betrachteten Wellenfläche und R^* deren Abstand von der Kennfläche bedeutet. Für $R^* = 0$ ergibt sich diese selbst, während wir für $R^* (= R) \rightarrow +\infty$ die im Unendlichen gelegene Wellenfläche erhalten, die unserem Strahlenbündel entspricht. Hieraus ergibt sich auch die positive Richtung von \mathfrak{N} .

Wir bezeichnen die dem Werte $R^* = R \rightarrow +\infty$ entsprechende Wellenfläche $\bar{\xi}^* = \xi^*(v, w, R^* = R)$ durch den Vektor $\bar{\xi}$, also:

$$(3^*) \quad \bar{\xi} = \xi(v, w) + R \cdot \mathfrak{N}(v, w)$$

und nehmen wieder — wie in § 1 — diese unendlich ferne Wellenfläche von einem undurchsichtigen Schirme bedeckt an bis auf den Teil, der der Öffnung des betrachteten Strahlenbündels entspricht. Diesen denken wir uns von außen mit Licht beleuchtet, dessen Wellenfläche unserer unendlich fernen Wellenfläche $\bar{\xi}(v, w, R)$ entspricht, das also nach den zu unserer Kennfläche (1) gehörenden Evolutenschalen (Kaustriken) — im geometrisch-optischen Sinne — konvergiert.

Um den Wert u_P der der Schwingungsgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$ genügenden und unser Strahlenbündel darstellenden Funktion u im Aufpunkte P zu erhalten, benutzen wir wieder die Gleichung

$$(4) \quad u_P = \frac{1}{4\pi} \cdot \int \left[u \cdot \frac{\partial}{\partial \nu} \left(\frac{e^{-ikr}}{r} \right) - \frac{e^{-ikr}}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial \nu} \right] d\sigma.$$

Für die hier auftretenden Oberflächenwerte der Funktion u und ihrer Ableitung nach der inneren Normalen ν können wir mit hinreichender Genauigkeit setzen

$$(5) \quad u = \frac{e^{ikR}}{R} \quad \text{und} \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} = -\frac{\partial u}{\partial R} = -ik \cdot \frac{e^{ikR}}{R}.$$

Wir bestimmen nun die Entfernung r des Aufpunktes P vom Flächenelement $d\sigma$ der unendlich fernen Wellenfläche $\bar{\xi}(v, w, R)$. Es wird, wenn die Lage des Aufpunktes P durch den Vektor ξ_P bestimmt wird,

$$\begin{aligned} r &= |\bar{\xi} - \xi_P| \\ &= \sqrt{(\bar{\xi}(v, w) + R \cdot \mathfrak{N}(v, w) - \xi_P)^2} \\ &= \sqrt{(R \cdot \mathfrak{N}(v, w) + [\bar{\xi}(v, w) - \xi_P])^2} \\ &= \sqrt{R^2 + 2R \cdot (\bar{\xi}(v, w) - \xi_P, \mathfrak{N}(v, w)) + (\bar{\xi}(v, w) - \xi_P)^2}. \end{aligned}$$

Nun ist, da $R \rightarrow \infty$, $|\bar{\xi}(v, w) - \xi_P| \ll R$, so daß

$$r = R + (\bar{\xi}(v, w) - \xi_P, \mathfrak{N}(v, w)) = R - (\xi_P - \bar{\xi}(v, w), \mathfrak{N}(v, w)).$$

Es ergibt sich demnach in derselben Näherung wie oben:

$$(6) \quad \frac{e^{-ikr}}{r} = \frac{e^{-ikR}}{R} \cdot e^{ik(\xi_P - \bar{\xi}(v, w), \mathfrak{N}(v, w))}$$

und entsprechend:

$$(7) \quad \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{e^{-ikr}}{r} \right) = +ik \cdot \frac{e^{-ikR}}{R} \cdot e^{ik(\xi_P - \bar{\xi}(v, w), \mathfrak{N}(v, w))}.$$

Setzen wir die Werte (5), (6) und (7) in Gleichung (4) ein, so erhalten wir für den Wert u_P der Funktion u im Aufpunkte P , wenn noch wegen $R \rightarrow \infty$

$$(8) \quad \frac{d\sigma}{R^2} = d\Omega$$

gesetzt wird, nach einigen Vereinfachungen:

$$(9) \quad u_P = \frac{ik}{2\pi} \cdot \int e^{ik(\xi_P - \bar{\xi}(v, w), \mathfrak{N}(v, w))} d\Omega,$$

wo $\bar{\xi}(v, w)$ und $\mathfrak{N}(v, w)$ von $d\Omega$ abhängig sind. In kartesischen Koordinaten geschrieben lautet Gleichung (9):

$$(9^*) \quad u_P = \frac{ik}{2\pi} \cdot \int e^{ik[z_P \cdot N_z + y_P \cdot N_y + x_P \cdot N_x - x \cdot N_x - y \cdot N_y - z \cdot N_z]} d\Omega,$$

wo

$$\left. \begin{aligned} x &= x(v, w) \\ y &= y(v, w) \\ z &= z(v, w) \end{aligned} \right\} \quad \text{und} \quad \left\{ \begin{aligned} N_x &= N_x(v, w) \\ N_y &= N_y(v, w) \\ N_z &= N_z(v, w) \end{aligned} \right.$$

Lassen wir in (9) den Aufpunkt $P = \xi_P$ variieren, so stellt die Funktion $u_P = u(\xi_P)$ wegen $|\mathfrak{N}(v, w)| = 1$ eine Lösung

der Schwingungsgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$ dar, und zwar für den Fall, daß das Strahlenbündel nach den beiden zur Fläche $\xi = \xi(v, w)$ gehörenden Evolutenschalen (Kaustriken) — im geometrisch-optischen Sinne —, die auch ausgeartet sein können, konvergiert.

Da jede der unendlich vielen geometrisch-optischen Wellenflächen des Strahlenbündels als Kennfläche gewählt werden kann, so folgt — rein formal — eine entsprechende Anzahl von Integralausdrücken für das betrachtete Strahlenbündel. Man erkennt aber leicht, daß alle diese so erhaltenen Ausdrücke sich nur um einen konstanten Phasenfaktor unterscheiden. Wählen wir nämlich zunächst die Kennfläche $\xi = \xi(v, w)$, so ergibt sich für u_P Gleichung (9). Jede der anderen Wellenflächen desselben Strahlenbündels läßt sich aber, da sie der Fläche $\xi = \xi(v, w)$ parallel ist, nach (8) darstellen durch:

$$\xi^* = \xi^*(v, w, R^*) = \xi(v, w) + R^* \cdot \mathfrak{N}(v, w).$$

Wählen wir diese Fläche $\xi^* = \xi^*(v, w, R^*)$ als Kennfläche des Strahlenbündels, so folgt aus (9):

$$\begin{aligned} u_P &= \frac{ik}{2\pi} \cdot \int e^{ik(\xi_P - \xi^*(v, w, R^*), \mathfrak{N}(v, w))} d\Omega \\ &= \frac{ik}{2\pi} \cdot e^{-ikR^*} \cdot \int e^{ik(\xi_P - \xi(v, w), \mathfrak{N}(v, w))} d\Omega, \end{aligned}$$

da ja $(\mathfrak{N}(v, w), \mathfrak{N}(v, w)) = 1$ ist. Der so für u_P erhaltene Ausdruck ist bis auf den Phasenfaktor e^{-ikR^*} mit (9) identisch.

Wir wollen nun noch das in (9) auftretende Differential $d\Omega = \frac{d\sigma}{R^2}$ in Beziehung setzen zu dem Flächenelement der Kennfläche bzw. zu den Differentialen dv, dw der beiden Parameter, die wir uns so gewählt denken, daß sich die Linien, $v = \text{const}$ und $w = \text{const}$ im ganzen Integrationsbereich nirgends berühren, d. h. also, daß zwei benachbarten Punkten des Integrationsbereichs stets zwei verschiedene (benachbarte) Wertepaare (v, w) entsprechen.¹⁾ Es ergibt sich, wenn von jetzt ab $d\sigma$ das Flächenelement der Kennfläche $\xi = \xi(v, w)$ und $K = K(v, w)$ das Gauss'sche Krümmungsmaß dieser Fläche bezeichnet, für $d\Omega$:

1) Dies ist z. B. stets der Fall, wenn die Linien $v = \text{const}$, $w = \text{const}$ Krümmungslinien sind, oder — allgemein — ein beliebiges isogonales Kurvensystem bilden.

$$(10) \quad d\Omega = K(v, w) d\sigma = K(v, w) \cdot \sqrt{\left[\frac{\partial \xi}{\partial v} \frac{\partial \xi}{\partial w}\right]^2} dv dw \\ = \sqrt{\left[\frac{\partial \Re}{\partial v} \frac{\partial \Re}{\partial w}\right]^2} dv dw.^1)$$

Gleichung (9) in Verbindung mit Gleichung (10) liefert uns also die der Schwingungsgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$ genügende Funktion u für irgendein beliebiges Strahlenbündel, das durch eine seiner geometrisch-optischen Wellenflächen ($\xi = \xi(v, w)$) gegeben ist.

Bei spezieller Wahl der Parameter v und w lassen sich die in (10) angegebenen Ausdrücke für $d\Omega$ noch etwas umformen. Sind beispielsweise die Kurven $v = \text{const}$ und $w = \text{const}$ die Krümmungslinien der Kennfläche und überdies v und w so gewählt, daß sie den Bogenlängen dieser Kurven entsprechen, so ergibt sich, wenn wir die so gewählten Parameter v und w durch s_1 bzw. s_2 und die beiden zugehörigen Krümmungsradien durch $\varrho_1 = \varrho_1(s_1, s_2)$ bzw. $\varrho_2 = \varrho_2(s_1, s_2)$ bezeichnen, für $d\Omega$:

$$d\Omega = \frac{ds_1}{\varrho_1} \cdot \frac{ds_2}{\varrho_2}$$

und demnach für u_P :

$$(11) \quad u_P = \frac{ik}{2\pi} \cdot \iint e^{ik(\xi_P - \xi(s_1, s_2), \Re(s_1, s_2))} \cdot \frac{ds_1 ds_2}{\varrho_1(s_1, s_2) \cdot \varrho_2(s_1, s_2)},$$

zu integrieren über den der Öffnung des Strahlenbündels entsprechenden Bereich der Variablen s_1 und s_2 .

Die gefundene Funktion $u_P = u(x_P, y_P, z_P)$ bleibt Lösung der Differentialgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$, wenn man in (9) einen reellen Faktor $\psi(v, w)$ bzw. in (11): $\psi(s_1, s_2)$ im Integranden hinzufügt. Auf der unendlich fernen Fläche, über welche die Integration in (4) ausgeführt wurde, ergibt sich dann eine variable, durch ψ^2 gemessene Intensität der Welle. Physikalisch wird dieser Fall verwirklicht, wenn das Strahlenbündel durch eine absorbierende Schicht veränderlicher Dicke bzw. von örtlich veränderlichem Absorptionskoeffizienten hindurchgestrahlt wird.

§ 4.

Um die im vorigen Paragraphen für den Fall eines beliebigen Strahlenbündels erhaltene Formel auf eine beliebige

1) \Re hat für die Einheitskugel (— Krümmungsmaß gleich eins —) dieselbe Bedeutung wie ξ für die Kennfläche.

Zylinderwelle zu übertragen, gehen wir aus von der spezialisierten Form (11) des § 3 und setzen zunächst voraus, daß wir ein Strahlenbündel zu behandeln haben, bei dem $\varrho_1(s_1, s_2)$ im ganzen Integrationsbereich konstant ist. Dann können wir $\varrho_1(s_1, s_2)$ — da ja u_P nur bis auf einen konstanten Faktor bestimmt ist — vernachlässigen. Wir erhalten für den so charakterisierten Spezialfall

$$(1) \quad u_P = \frac{ik}{2\pi} \cdot \int \int e^{ik(x_P - \xi(s_1, s_2), \mathfrak{N}(s_1, s_2))} \frac{ds_1 \cdot ds_2}{\varrho_2(s_1, s_2)}.$$

Bei einer beliebigen Zylinderwelle läuft die eine Schar der Krümmungslinien ($s_1 = \text{const}$) der Achse des Zylinders parallel, und es ist $\varrho_1 = \text{const}$. Wir nehmen das Koordinatensystem (x, y, z) so an, daß die z -Achse der Zylinderachse parallel ist, so daß $s_1 = z$ wird. Für s_2 schreiben wir nunmehr s . Dann wird

$$\begin{aligned} \xi(s_1, s_2) &= \{x(s); y(s); z\}; \quad \mathfrak{N}(s_1, s_2) = \{N_x(s); N_y(s); 0\}; \\ \varrho_2(s_1, s_2) &= \varrho(s). \end{aligned}$$

Die Projektion des Vektors $\xi(s_1, s_2)$ auf die xy -Ebene bezeichnen wir durch $\xi(s) = \{x(s); y(s)\}$. Entsprechend können wir für $\mathfrak{N}(s_1, s_2)$ schreiben $\mathfrak{N}(s)$ und erhalten so für u_P nach Ausführung der Integration über z von $-A$ bis $+A$

$$(2) \quad u_P = \frac{ik}{2\pi} \cdot 2A \cdot \int e^{ik(x_P - \xi(s), \mathfrak{N}(s))} \frac{ds}{\varrho(s)} \cdot 1,$$

wo ξ_P jetzt der in der xy -Ebene liegende Vektor ist, der der Projektion des nach dem Aufpunkt P hingezogenen Radiusvektors auf die xy -Ebene entspricht.

Für eine Kreiszyylinderwelle wird $\varrho(s) = \text{const}$ und — wenn wir noch $s/\varrho = \varphi$ setzen —

$$\xi(s) = \{\varrho \cdot \cos \varphi; \varrho \cdot \sin \varphi\}; \quad \mathfrak{N}(s) = \{\cos \varphi; \sin \varphi\}; \quad \frac{ds}{\varrho(s)} = d\varphi,$$

so daß sich wieder die von Debye für die ebene Kreiszyylinderwelle angegebene Formel ergibt:

$$u_P = \frac{ik}{2\pi} \cdot 2A \cdot e^{-ik\varrho} \cdot \int e^{ik[x_P \cos \varphi + y_P \sin \varphi]} d\varphi.$$

1) Da in (2) die z -Koordinate des Aufpunktes vollständig herausfällt, so kann (2) — angewandt auf eine räumliche Zylinderwelle — nur für solche Aufpunkte gelten, die hinreichend weit von den Grenzen $z = +A$ bzw. $z = -A$ entfernt sind, und für die gleichzeitig $-A < z < +A$ ist.

Um von (2) zu der für ein beliebiges ebenes Strahlenbündel geltenden Debye-Fischerschen Formel

$$(3) \quad u_P = \text{const.} \cdot \int e^{ik[r_P' \cdot \cos(\varphi_P' - \varphi) + s^*]} d\varphi$$

zu gelangen (vgl. Einleitung), verfahren wir folgendermaßen. Das skalare Produkt $(\mathbf{r}_P - \mathbf{r}(s), \mathbf{N}(s))$ der Formel (2) ist die Projektion des Vektors $\mathbf{r}_P - \mathbf{r}(s)$ auf den durch den Punkt $\mathbf{r}(s)$ gehenden Lichtstrahl (Fig. 3), d. h. die längs dieses Lichtstrahles gemessene Entfernung des Punktes N von dem

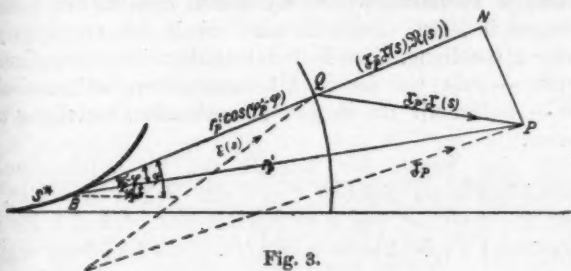


Fig. 3.

Schnittpunkte Q des betreffenden Lichtstrahles mit der Kennfläche $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$. Andererseits ist $r_P' \cdot \cos(\varphi_P' - \varphi)$ die Entfernung des Punktes N vom Berührungspunkt B des betreffenden Lichtstrahles mit der zu unserem Strahlenbündel gehörenden Kaustik. Da die Wellenfläche $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ Evolvente der Kaustik ist, so wird $s^* + \overline{BQ} = \text{const}$ für das ganze Integrationsgebiet, und wir erhalten:

$$r_P' \cdot \cos(\varphi_P' - \varphi) + s^* = s^* + \overline{BN} = s^* + \overline{BQ} + \overline{QN} \\ = \text{const.} + (\mathbf{r}_P - \mathbf{r}(s), \mathbf{N}(s)).$$

Da außerdem $\frac{ds}{\varrho(s)} = d\varphi$ ist, so unterscheiden sich die beiden Formeln (2) und (3) nur um einen konstanten Phasenfaktor.

§ 5.

Um die in § 3 abgeleitete Formel, die für ein beliebiges Strahlenbündel gilt, anwenden zu können, muß die Gleichung einer der geometrisch-optischen Wellenflächen, der Kennfläche des Strahlenbündels, bekannt sein, während die Anwendung der für den ebenen Fall geltenden Debye-Fischerschen Formel die Kenntnis der Gleichung der geometrisch-

optischen Kaustik voraussetzt. Wir hatten in § 4 die Identität unserer auf den ebenen Fall übertragenen Formel mit der von Debye-Fischer nachgewiesen. Es soll nunmehr die in § 8 angegebene Formel so umgeformt werden, daß auch für den räumlichen Fall die Kennfläche durch die geometrisch-optische Kaustik des Strahlenbündels ersetzt wird. Hierbei ist zu beachten, daß die Kaustik im allgemeinen aus zwei Schalen besteht, die jedoch in gewissen Fällen ausarten können. Im allgemeinen werden wir daher zwei formal verschiedene Formeln erhalten, je nachdem, welche der beiden Schalen der Kaustik wir zugrunde legen. Artet die eine Schale aus, so ergibt sich nur *eine* Darstellung. Den Fall, daß beide Schalen der Kaustik ausarten — wie bei der in § 1 behandelten astigmatischen Welle — wollen wir für die hier zu suchende Darstellung ausschließen.

Die eine Schale der Kaustik des zu untersuchenden Strahlenbündels sei gegeben durch den Vektor $\eta = \eta(s^*, q)$, wo die Parameter s^* und q so gewählt sind, daß sich für das Bogenelement ds der Fläche $\eta = \eta(s^*, q)$ die Gleichung ergibt:

$$ds^2 = ds^{*2} + \left(\frac{\partial \eta}{\partial q}\right)^2 \cdot dq^2.$$

Geometrisch bedeutet dies: Die Kurven $q = \text{const}$ sind geodätische Linien,¹⁾ die Kurven $s^* = \text{const}$ deren orthogonale Trajektorien, und zwar ist s^* die Bogenlänge der geodätischen Linien $q = \text{const}$, gemessen von der orthogonalen Trajektorie $s^* = 0$ bis zum Punkte (s^*, q) , d. h. s^* ist der normalgeodätische Abstand des Punktes (s^*, q) von der Kurve $s^* = 0$.¹⁾ Um eine Fläche $\xi = \xi(s^*, q)$ zu finden, zu der die gegebene Fläche $\eta = \eta(s^*, q)$ die eine der Evolutenschalen ist, haben wir die Gleichung anzusetzen

$$(1) \quad \xi = \xi(s^*, q) = \eta(s^*, q) - (s^* + \text{const}) \cdot \frac{\partial \eta(s^*, q)}{\partial s^*}.$$

Soll nun die Fläche $\xi = \xi(s^*, q)$ die Kennfläche unseres Strahlenbündels sein, so müssen wir unsere Kurven $s^* = \text{const}$ bzw. $q = \text{const}$ noch speziellen Bedingungen unterwerfen. Wir müssen nämlich beachten, daß wir zu der Kennfläche $\xi = \xi(s^*, q)$ unseres Strahlenbündels nur dann gelangen,

1) Vgl. Knoblauch, Einleitung in die Theorie der krummen Flächen, Leipzig 1888, S. 228 ff.

wenn wir die Parameter (s^*, q) so wählen, daß die in Richtung der Kurven $q = \text{const}$ an die Fläche $\eta(s^*, q)$ gelegten Tangenten $\partial \eta(s^*, q) / \partial s^*$ mit den geometrisch-optischen Lichtstrahlen unseres Strahlenbündels zusammenfallen. Da sich durch jeden Punkt einer Fläche in vorgegebener Richtung stets eine und nur eine geodätische Linie legen läßt, so ist die entsprechende Wahl der Parameter s^* und q eindeutig möglich.¹⁾ Wir setzen nun voraus, daß die Wahl in dem genannten Sinne getroffen ist. Dann besteht also zwischen der Kennfläche unseres Strahlenbündels und der betreffenden Schale der Kaustik die Beziehung (1), wo $\partial \eta / \partial s^*$ den absoluten Betrag 1 hat und in Richtung den Lichtstrahlen des betrachteten Strahlenbündels, d. h. den Normalen der Kennfläche $\xi = \xi(s^*, q)$ entspricht. Wir erhalten demnach:

$$(\xi_P - \xi(s^*, q), \mathfrak{R}(s^*, q)) = (\xi_P - \eta(s^*, q), \mathfrak{R}(s^*, q)) + s^* + \text{const.}$$

Nun bedeutet das rechts auftretende skalare Produkt die Projektion des vom Integrationspunkt (s^*, q) der Kaustik nach dem Aufpunkt gezogenen Fahrstrahles auf den Lichtstrahl, der die Kaustik im Integrationspunkt berührt. Die Größe s^* ist die Bogenlänge der geodätischen Linie, die in Richtung des betreffenden Lichtstrahles durch den Integrationspunkt der Kaustik hindurchgeht, gerechnet von ihrem Schnitt mit derjenigen orthogonalen Trajektorie, der — willkürlich — der Wert $s^* = 0$ zugeordnet wurde.

Wir können nun wieder beliebige Parameter (v, w) annehmen; dann erhalten wir für u_P — von einem konstanten Phasenfaktor abgesehen —

$$(2) \quad u_P = \frac{ik}{2\pi} \cdot \iint e^{ik[\xi_P - \eta(v, w), \mathfrak{R}(v, w)] + s^*(v, w)} \cdot \sqrt{\left[\frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial v}, \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial w}\right]^2} dv dw$$

oder in Analogie zu der für ein ebenes Strahlenbündel geltenden Formel von Debye-Fischer:

$$(3) \quad \begin{cases} u_P = \frac{ik}{2\pi} \\ \cdot \iint e^{ik[r_P'(\cos \vartheta_P' \cos \vartheta + \sin \vartheta_P' \sin \vartheta \cos(\varphi_P' - \varphi)) + s^*]} \sin \vartheta d\vartheta d\varphi, \end{cases}$$

wenn $\mathfrak{R}(v, w) = \{\cos \vartheta, \sin \vartheta \cos \varphi, \sin \vartheta \sin \varphi\}$ gesetzt wird. In (3) bedeuten $(r_P', \vartheta_P', \varphi_P')$ die Polarkoordinaten des Aufpunktes P , bezogen auf ein Koordinatensystem, dessen Ur-

1) Abgesehen von einer — unwesentlichen — additiven Konstanten.

prungspunkt im Integrationspunkt der Kaustik liegt, d. h. in dem Punkte, in dem der zum Wertepaar (ϑ, φ) gehörige Lichtstrahl die betreffende Schale der Kaustik berührt, und das aus dem ursprünglichen System (r, ϑ, φ) durch Parallelverschiebung hervorgeht. $s^* = s^*(\vartheta, \varphi)$ ist die Bogenlänge der im oben angegebenen Sinne definierten geodätischen Linien der betreffenden Schale der Kaustik.

Bei achsensymmetrischen Strahlenbündeln — und um solche handelt es sich in der Praxis wohl meistens — artet die eine Schale der Kaustik aus. Sie fällt mit einem Teile der Achse des Strahlenbündels zusammen. Die andere Schale der Kaustik ist dann gleichfalls achsensymmetrisch. In dem dem Werte $\vartheta = 0$ entsprechenden Punkte besitzt sie eine Spitze. Die orthogonal-geodätischen Linien der betreffenden nicht ausgearteten Kaustikschale gehen dann über in polar-geodätische. Als Kurve $s^* = 0$ können wir hier die Spitze der Kaustik wählen, so daß die Bogenlänge $s^*(\vartheta, \varphi)$ von der Spitze der Kaustik aus zu messen ist.

§ 6.

Wir hatten in § 3 gesehen, daß sich jedes beliebige (astigmatische) Strahlenbündel darstellen läßt in der Form

$$u_P = \frac{ik}{2\pi} \cdot \int e^{ik(x_P - \xi(v, w), \eta(v, w))} \cdot \psi(v, w) d\Omega, \quad (\psi \text{ reell})$$

wofür wir auch schreiben können:

$$u_P = \frac{ik}{2\pi} \cdot \int \int e^{ik[x_P \cdot \alpha + y_P \cdot \beta + z_P \cdot \gamma - (x \cdot \alpha + y \cdot \beta + z \cdot \gamma)]} \cdot \psi(\beta, \gamma) \frac{d\beta d\gamma}{a}, \quad (\psi \text{ reell})$$

worin

$x = x(\beta, \gamma)$; $y = y(\beta, \gamma)$; $z = z(\beta, \gamma)$ und $\alpha = \sqrt{1 - \beta^2 - \gamma^2}$ ist. Wir wollen nun zeigen, daß auch jedes Integral der Form

$$\frac{ik}{2\pi} \cdot \int \int e^{ik[x_P \cdot \alpha + y_P \cdot \beta + z_P \cdot \gamma - f(\beta, \gamma)]} \cdot \psi(\beta, \gamma) \frac{d\beta d\gamma}{a}, \quad (\psi \text{ reell})$$

wo $f(\beta, \gamma)$ eine beliebige Funktion der Integrationsvariablen (β, γ) ist, sich als Darstellung eines astigmatischen Strahlenbündels deuten läßt. Wir haben dazu nur drei Funktionen $x(\beta, \gamma)$; $y(\beta, \gamma)$; $z(\beta, \gamma)$ so zu bestimmen, daß

$$(1) \quad x(\beta, \gamma) \cdot \alpha + y(\beta, \gamma) \cdot \beta + z(\beta, \gamma) \cdot \gamma = f(\beta, \gamma)$$

ist, und daß ferner die aus den partiellen Ableitungen dieser Funktionen nach β und γ gebildeten Vektoren

$$\left\{ \frac{\partial x}{\partial \beta}; \frac{\partial y}{\partial \beta}; \frac{\partial z}{\partial \beta} \right\} \quad \text{und} \quad \left\{ \frac{\partial x}{\partial \gamma}; \frac{\partial y}{\partial \gamma}; \frac{\partial z}{\partial \gamma} \right\}$$

auf dem Vektor $(\alpha; \beta; \gamma)$ senkrecht stehen. Geometrisch gibt uns Gleichung (1) die Gesamtheit aller an die Wellenfläche gelegten Tangentialebenen. Die Wellenfläche selbst bildet also die Enveloppe jener Ebenenschar. Um ihre Gleichung zu erhalten, differenzieren wir (1) nach β und γ und erhalten, da ja

$$\frac{\partial x}{\partial \beta} \cdot \alpha + \frac{\partial y}{\partial \beta} \cdot \beta + \frac{\partial z}{\partial \beta} \cdot \gamma = 0$$

und auch

$$\frac{\partial x}{\partial \gamma} \cdot \alpha + \frac{\partial y}{\partial \gamma} \cdot \beta + \frac{\partial z}{\partial \gamma} \cdot \gamma = 0$$

ist, die beiden Gleichungen

$$(2) \quad -x(\beta, \gamma) \cdot \frac{\beta}{\alpha} + y(\beta, \gamma) = \frac{\partial f(\beta, \gamma)}{\partial \beta}$$

$$(3) \quad -x(\beta, \gamma) \cdot \frac{\gamma}{\alpha} + z(\beta, \gamma) = \frac{\partial f(\beta, \gamma)}{\partial \gamma}$$

Aus (1), (2) und (3) folgt dann sofort

$$x(\beta, \gamma) = \alpha \cdot \left[f(\beta, \gamma) - \beta \cdot \frac{\partial f(\beta, \gamma)}{\partial \beta} - \gamma \cdot \frac{\partial f(\beta, \gamma)}{\partial \gamma} \right]$$

$$y(\beta, \gamma) = \beta \cdot \left[f(\beta, \gamma) - \left(\beta - \frac{1}{\beta} \right) \cdot \frac{\partial f(\beta, \gamma)}{\partial \beta} - \gamma \cdot \frac{\partial f(\beta, \gamma)}{\partial \gamma} \right]$$

$$z(\beta, \gamma) = \gamma \cdot \left[f(\beta, \gamma) - \beta \cdot \frac{\partial f(\beta, \gamma)}{\partial \beta} - \left(\gamma - \frac{1}{\gamma} \right) \cdot \frac{\partial f(\beta, \gamma)}{\partial \gamma} \right].$$

Ist z. B.

$$f(\beta, \gamma) = a \cdot \alpha + b \cdot \beta + c \cdot \gamma + d,$$

so folgt

$$x = a + \alpha \cdot d; \quad y = b + \beta \cdot d; \quad z = c + \gamma \cdot d.$$

Dies ist die Paramaterdarstellung einer Kugel vom Radius d und dem Mittelpunkt (a, b, c) . Wir erhalten also in diesem Falle die Darstellung einer nach dem Brennpunkte (a, b, c) hin konvergierenden Kugelwelle, wie man dies auch sofort direkt erkennt.

Da sich der von E. T. Whittaker¹⁾ als allgemeine Lösung der Schwingungsgleichung angegebene Ausdruck

$$\iint e^{ik[x_P \cdot \alpha(v, w) + y_P \cdot \beta(v, w) + z_P \cdot \gamma(v, w)]} \cdot \varphi(v, w) dv dw$$

1) E. T. Whittaker, Math. Ann. 57. S. 333/355. 1903.

von dem hier behandelten nicht wesentlich unterscheidet, so läßt sich jedem beliebigen Wellenvorgang eindeutig ein geometrisch-optisches Problem zuordnen.

Wir wollen noch die Gleichungen zur Bestimmung der Kennfläche eines Strahlenbündels hier angeben, wenn dieses gegeben ist durch

$$u_P = \frac{ik}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} \int_0^\vartheta e^{ik[x_P \cos \vartheta + y_P \sin \vartheta \cos \varphi + z_P \sin \vartheta \sin \varphi - f(\vartheta, \varphi)]} \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi.$$

In derselben Art wie oben erhalten wir für die zugehörige Kennfläche:

$$x = x(\vartheta, \varphi) = + \cos \vartheta \cdot f(\vartheta, \varphi) - \sin \vartheta \cdot \frac{\partial f(\vartheta, \varphi)}{\partial \vartheta}$$

$$y = y(\vartheta, \varphi) = + \sin \vartheta \cdot \cos \varphi \cdot f(\vartheta, \varphi) + \cos \vartheta \cdot \cos \varphi \cdot \frac{\partial f(\vartheta, \varphi)}{\partial \vartheta} - \frac{\sin \varphi}{\sin \vartheta} \cdot \frac{\partial f(\vartheta, \varphi)}{\partial \varphi}$$

$$z = z(\vartheta, \varphi) = + \sin \vartheta \cdot \sin \varphi \cdot f(\vartheta, \varphi) + \cos \vartheta \cdot \sin \varphi \cdot \frac{\partial f(\vartheta, \varphi)}{\partial \vartheta} + \frac{\cos \varphi}{\sin \vartheta} \cdot \frac{\partial f(\vartheta, \varphi)}{\partial \varphi}.$$

Die übrigen Wellenflächen des betrachteten Strahlenbündels ergeben sich, indem man in diesen Gleichungen $f(\vartheta, \varphi)$ ersetzt durch $f(\vartheta, \varphi) + \text{const.}$ ||

§ 7.

Wir wollen nun die in § 3 für ein Strahlenbündel von beliebiger Gestalt — aber von für alle Strahlrichtungen konstanter Intensität — angegebene Formel

$$(1) \quad u_P = \frac{ik}{2\pi} \cdot \int e^{ik(x_P - \mathfrak{z}(v, w), \mathfrak{R}(v, w))} d\Omega$$

auf einige spezielle Fälle anwenden. Man erkennt leicht, daß sich aus (1) für die Kugelwelle sowie für die Kreiszyklinderwelle die von Debye hergeleiteten Ausdrücke ergeben. Dasselbe gilt auch für das von Fischer in der genannten Arbeit betrachtete „ebene Strahlenbündel mit sphärischer Aberration“, dessen Kaustik der Gleichung $y^2 = \frac{8}{27b} \cdot x^3$ genügt. Eine der Wellenflächen (Wellenlinien) dieses ebenen Strahlenbündels ist die Parabel $x = -b + \frac{b}{2} \operatorname{tg}^2 \vartheta$; $y = -b \cdot \operatorname{tg} \vartheta$.

Wir wählen diese zur Kennfläche und erhalten:

$$u_P = \frac{ik}{2\pi} \cdot \int_0^{\vartheta} e^{ik \left[z_P \cdot \cos \vartheta + y_P \cdot \sin \vartheta + b \cdot \cos \vartheta + \frac{b}{2} \cdot \frac{\sin^2 \vartheta}{\cos \vartheta} \right]} d\vartheta,$$

was wegen

$$b \cdot \cos \vartheta + \frac{b}{2} \cdot \frac{\sin^2 \vartheta}{\cos \vartheta} = \frac{b}{2} \cdot \left(\cos \vartheta + \frac{1}{\cos \vartheta} \right) = \frac{b}{2} \cdot \frac{(1 - \cos \vartheta)^2}{\cos \vartheta} + b$$

mit der Fischerschen Formel identisch ist.

Wir betrachten nunmehr das diesem ebenen Strahlenbündel analoge achsensymmetrische räumliche Strahlenbündel mit sphärischer Aberration, dessen beide Kaustikschalen den Gleichungen genügen:

$$y_1^2 + z_1^2 = \frac{8}{27b} \cdot x_1^3 \quad \text{bzw.} \quad y_2^2 + z_2^2 = 0.$$

Unter seinen Wellenflächen befindet sich das Rotationsparaboloid

$$x = -b + \frac{b}{2} \cdot \operatorname{tg}^2 \vartheta; \quad y = -b \cdot \operatorname{tg} \vartheta \cdot \cos \varphi; \quad z = -b \cdot \operatorname{tg} \vartheta \cdot \sin \varphi.$$

Für u_P erhalten wir dann:

$$u_P = \frac{ik}{2\pi} \cdot \int_0^{\vartheta} \int_0^{2\pi} e^{ik \left[x_P \cdot \cos \vartheta + y_P \cdot \sin \vartheta \cdot \cos \varphi + z_P \cdot \sin \vartheta \cdot \sin \varphi + \frac{b}{2} \left(\cos \vartheta + \frac{1}{\cos \vartheta} \right) \right]} \sin \vartheta d\vartheta d\varphi,$$

$$(2^*) \quad \left\{ \begin{array}{l} u_P = ik \\ \cdot \int_0^{\vartheta} J_0(k \varrho_P \sin \vartheta) \cdot e^{ik \left[x_P \cdot \cos \vartheta + \frac{b}{2} \left(\cos \vartheta + \frac{1}{\cos \vartheta} \right) \right]} \sin \vartheta d\vartheta, \end{array} \right.$$

worin $\varrho_P = \sqrt{y_P^2 + z_P^2}$ und $J_0(k \varrho_P \sin \vartheta)$ die Besselsche Zylinderfunktion erster Art nullter Ordnung vom Argument $k \varrho_P \sin \vartheta$ ist.

Entwickeln wir $\cos \vartheta$ und $1/\cos \vartheta$ nach Potenzen von $\sin \vartheta$

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \cos \vartheta = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 \vartheta - \frac{1}{8} \sin^4 \vartheta - \frac{1}{16} \sin^6 \vartheta - \frac{5}{128} \sin^8 \vartheta - \dots \\ \frac{1}{\cos \vartheta} = 1 + \frac{1}{2} \sin^2 \vartheta + \frac{3}{8} \sin^4 \vartheta + \frac{5}{16} \sin^6 \vartheta + \frac{35}{128} \sin^8 \vartheta + \dots \end{array} \right.$$

und ersetzen in (2) den im Exponenten des Integranden auftretenden von der sphärischen Aberration herrührenden Ausdruck $\frac{b}{2} \left(\cos \vartheta + \frac{1}{\cos \vartheta} \right)$ durch die ersten Glieder der Entwicklung nach $\sin \vartheta$, schreiben also¹⁾:

1) Den konstanten Phasenfaktor e^{ikb} vernachlässigen wir, da er ohne Bedeutung ist.

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} u_P &= \frac{ik}{2\pi} \\ &\cdot \int_0^\vartheta \int_0^{2\pi} e^{ik \left[x_P \cos \vartheta + y_P \sin \vartheta \cos \varphi + z_P \sin \vartheta \sin \varphi + \frac{b}{8} \sin^4 \vartheta \right]} \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi \end{aligned} \right.$$

$$(4^*) \quad u_P = ik \cdot \int_0^\vartheta J_0(k \varrho_P \sin \vartheta) \cdot e^{ik \left[x_P \cos \vartheta + \frac{b}{8} \sin^4 \vartheta \right]} \sin \vartheta \, d\vartheta,$$

so ist dies der exakte mathematische Ausdruck für ein Strahlenbündel, dessen Kennfläche nach § 6 den Gleichungen genügt:

$$\begin{aligned} x &= \frac{3}{8} b \cdot \sin^4 \vartheta \cos \varphi; & y &= -\frac{b}{8} \cdot \sin^3 \vartheta \cos \varphi (4 - 3 \sin^2 \vartheta); \\ z &= -\frac{b}{8} \cdot \sin^3 \vartheta \sin \varphi (4 - 3 \sin^2 \vartheta). \end{aligned}$$

Die Gleichungen der übrigen Wellenflächen dieses Strahlenbündels lauten entsprechend:-

$$\begin{aligned} x &= \frac{b}{8} \cdot \cos \vartheta (3 \sin^4 \vartheta + \text{const}); \\ y &= \frac{b}{8} \cdot \sin \vartheta \cos \varphi (-4 \sin^2 \vartheta + 3 \sin^4 \vartheta + \text{const}); \\ z &= \frac{b}{8} \cdot \sin \vartheta \sin \varphi (-4 \sin^2 \vartheta + 3 \sin^4 \vartheta + \text{const}). \end{aligned}$$

Für kleine Werte von ϑ stimmen die beiden durch (2) und (4) dargestellten Strahlenbündel überein, wie aus (3) unmittelbar folgt. Wir stellen noch für das zuletzt betrachtete Strahlenbündel, für welches wir unten die Auswertung des zugehörigen Integralausdruckes (4) durchführen werden, die Gleichungen der Brennflächen auf. Wir bezeichnen die beiden Hauptkrümmungsradien wieder wie oben durch ϱ_1 bzw. ϱ_2 . Dann ergibt sich zunächst:

$$\begin{aligned} \varrho_1 &= \frac{3}{8} b \cdot \sin^2 \vartheta \cdot (4 - 5 \sin^2 \vartheta) \\ \text{und} \\ \varrho_2 &= \frac{1}{8} b \cdot \sin^2 \vartheta \cdot (4 - 3 \sin^2 \vartheta) \end{aligned}$$

und demnach für die Brennflächen:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \frac{3}{2} b \cdot \sin^2 \vartheta \cos^3 \vartheta \\ y_1 &= \frac{1}{2} b \cdot \sin^3 \vartheta \cos \vartheta (2 - 3 \sin^2 \vartheta) \\ z_1 &= \frac{1}{2} b \cdot \sin^3 \vartheta \sin \vartheta (2 - 3 \sin^2 \vartheta) \end{aligned} \right\} \text{ und } \left\{ \begin{aligned} x_2 &= \frac{1}{2} b \cdot \sin^2 \vartheta \cos \vartheta \\ y_2 &= 0 \\ z_2 &= 0. \end{aligned} \right.$$

Fig. 4 zeigt den Schnitt dieser Brennflächen mit einer durch die Achse des Strahlenbündels gelegten Ebene. Außerdem ist — gestrichelt — noch die Kennfläche des Strahlenbündels angedeutet. Wie man aus den Gleichungen der Brennflächen und auch aus der Fig. 4 ersieht, handelt es sich hier um ein achsensymmetrisches Strahlenbündel (— die zweite Schale der Kaustik ist ausgeartet und fällt mit einem Teil der Achse des Bündels zusammen —), das für einen Achsenwinkel von 90° „sphärisch korrigiert“ ist, da x_2 sowohl für $\vartheta=0$ als auch für $\vartheta=\pi/2$ den Wert Null annimmt.

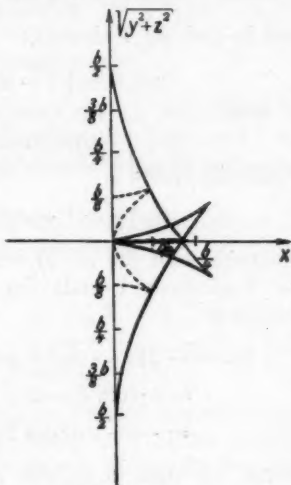


Fig. 4.

Wenden wir jetzt die allgemeine Formel (1) auf das in § 1 behandelte spezielle astigmatische Strahlenbündel an, so läßt sich leicht zeigen, daß sich wieder die oben erhaltenen Resultate ergeben. Setzen wir die Gleichungen der Kennfläche des betreffenden astigmatischen Strahlenbündels etwa in der Form:

$$x = (d - a) \cdot \cos \vartheta + \frac{2a \cdot \cos \vartheta}{\sqrt{1 - \sin^2 \vartheta \sin^2 \varphi}} - a$$

$$y = (d - a) \cdot \sin \vartheta \cos \varphi + \frac{2a \cdot \sin \vartheta \cos \varphi}{\sqrt{1 - \sin^2 \vartheta \sin^2 \varphi}}$$

$$z = (d - a) \cdot \sin \vartheta \sin \varphi,$$

worin d eine beliebige Konstante bezeichnen mag und $2a$ wieder den auf der Achse des Bündels gemessenen Abstand der beiden zu Brennnlinien ausgearteten Evolutenschalen bezeichnet. Die beiden Brennnlinien schneiden die Achse ($y=z=0$) in den Punkten $x = +a$ bzw. $x = -a$. Es ergibt sich für u_P unter Vernachlässigung des konstanten Phasenfaktors $e^{ik(a-d)}$ wie in § 1:

$$(5) \quad u_P = \frac{ik}{2\pi} \cdot \int_0^{\vartheta} \int_0^{2\pi} e^{ik[(x_P+a) \cos \vartheta + y_P \sin \vartheta \cos \varphi + z_P \sin \vartheta \sin \varphi - 2a \cdot \sqrt{1 - \sin^2 \vartheta \sin^2 \varphi}]} \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi.$$

Für kleine Öffnungswinkel des Strahlenbündels, d. h. solange $\sin 2\theta \ll 1$ ist, können wir schreiben:

$$2\sqrt{1 - \sin^2 \theta \sin^2 \varphi} = 2 - \sin^2 \theta \sin^2 \varphi$$

und in gleicher Näherung:

$$\cos \vartheta = \sqrt{1 - \sin^2 \theta \sin^2 \varphi} = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 \theta \sin^2 \varphi,$$

so daß

$$\sin^2 \vartheta = 2 \cdot (1 - \cos \vartheta).$$

Ferner ist stets:

$$\sin^2 \varphi = 1 - \cos^2 \varphi = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\varphi).$$

Demnach wird der in (5) auftretende vom Astigmatismus und der besonderen Gestalt der beiden Brennpunkte herrührende Ausdruck:

$$\begin{aligned} & a(\cos \vartheta - 2\sqrt{1 - \sin^2 \theta \sin^2 \varphi}) \\ &= a \cdot [\cos \vartheta - 2 + (1 - \cos \vartheta) - \cos 2\varphi (1 - \cos \vartheta)] \\ &= -a - a \cdot \cos 2\varphi (1 - \cos \vartheta). \end{aligned}$$

Setzen wir dies in (5) ein, so erhalten wir, wenn wir wieder den konstanten Phasenfaktor e^{-ika} fortlassen:

$$(6) \quad u_P = \frac{ik}{2\pi} \cdot \int_0^\theta \int_0^{2\pi} e^{ik[z_P \cos \vartheta + y_P \sin \vartheta \cos \varphi + z_P' \sin \vartheta \sin \varphi - a \cos 2\varphi (1 - \cos \vartheta)]} \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi.$$

In dem durch (6) dargestellten Strahlenbündel treten beide Brennflächen gleichberechtigt auf, wie man aus der Form des Integranden schließen kann. Außerdem erkennt man, daß für sehr kleine Werte von θ die Lichtverhältnisse sich denen einer Kugelwelle nähern, wobei die „Stelle engster Einschnürung“, die mit dem Koordinatenursprungspunkt in (6) zusammenfällt und ungefähr in der Mitte zwischen beiden Brennflächen liegt, die Rolle des Brennpunktes der „Kugelwelle“ übernimmt.

Wir sehen, daß für kleine Werte von θ die durch (6) und (5) dargestellten Strahlenbündel übereinstimmen. Für größere Werte von θ ist dies jedoch nicht mehr der Fall, denn (6) ist der Ausdruck für ein Strahlenbündel, dessen Wellenflächen gegeben sind durch die Gleichungen (vgl. § 6):

$$\begin{aligned}
 x &= a \cdot \{\cos \vartheta \cdot (\cos 2\varphi + \text{const}) - \cos 2\varphi\} \\
 &= a \cdot \cos \vartheta \cdot \left[\text{const} + \cos 2\varphi \left(1 - \frac{1}{\cos \vartheta} \right) \right] \\
 y &= a \cdot \sin \vartheta \cos \varphi \cdot \left(\text{const} + 1 + 2 \cdot \sin^2 \varphi \cdot \text{tg}^2 \frac{\vartheta}{2} \right) \\
 z &= a \cdot \sin \vartheta \sin \varphi \cdot \left(\text{const} - 1 - 2 \cdot \cos^2 \varphi \cdot \text{tg}^2 \frac{\vartheta}{2} \right).
 \end{aligned}$$

Für $\text{const} = 0$ ergibt sich hieraus die als Kennfläche gewählte Wellenfläche. Wir werden unten die Auswertung von (6) für auf der Achse des Strahlenbündels gelegene Aufpunkte durchführen.

Zum Schluß wollen wir noch die Integraldarstellung für ein Strahlenbündel geben, dessen Kennfläche ein elliptisches Paraboloid¹⁾ ist.²⁾ Wir setzen

$$\begin{aligned}
 x &= -\frac{1}{2\alpha^2} \cdot (\varrho_1 \beta^2 + \varrho_2 \gamma^2); & y &= \frac{\varrho_1 \beta}{\alpha}; & z &= \frac{\varrho_2 \gamma}{\alpha}; \\
 (\alpha &= \sqrt{1 - \beta^2 - \gamma^2}),
 \end{aligned}$$

wo ϱ_1 und ϱ_2 die Krümmungsradien im Scheitel des elliptischen Paraboloids sind, negativ, wenn dieses nach rechts geöffnet ist, also einem Strahlenbündel entspricht, dessen Randstrahlen stärker konvergieren als die Paraxialstrahlen.²⁾ Für u_P erhalten wir:

$$(7) \quad u_P = \frac{ik}{2\pi} \cdot \int_{-\beta_1}^{+\beta_1} \int_{-\gamma_1}^{+\gamma_1} e^{ik \left[x_P \cdot \alpha + y_P \cdot \beta + z_P \cdot \gamma - \frac{\varrho_1 \beta^2 + \varrho_2 \gamma^2}{2\alpha} \right]} \frac{d\beta d\gamma}{\alpha}.$$

Für $\varrho_1 = \varrho_2 = \varrho$ geht das elliptische Paraboloid in ein Rotationsparaboloid über und (7) dementsprechend in

$$(8) \quad u_P = \frac{ik}{2\pi} \cdot \int_{-\beta_1}^{+\beta_1} \int_{-\gamma_1}^{+\gamma_1} e^{ik \left[x_P \cdot \alpha + y_P \cdot \beta + z_P \cdot \gamma - \frac{\varrho(\beta^2 + \gamma^2)}{2\alpha} \right]} \frac{d\beta d\gamma}{\alpha}.$$

Diese Darstellung ist identisch mit (2), abgesehen von einer Koordinatentransformation; man erkennt dies leicht, wenn man beachtet, daß

$$\frac{1}{2} \left(\cos \vartheta + \frac{1}{\cos \vartheta} \right) = \cos \vartheta + \frac{1}{2} \frac{\sin^2 \vartheta}{\cos \vartheta}$$

1) Bei verschiedenen Vorzeichen von ϱ_1 und ϱ_2 ergibt sich als Kennfläche das hyperbolische Paraboloid.

2) Vgl. §§ 10 und 11.

ist und für den in (2) auftretenden Wert b in (8) der Wert $-g$ gesetzt ist.

Die Ausdrücke (7) und (8) gestatten für nicht zu weit geöffnete Strahlenbündel eine Diskussion der Lichtverhältnisse in der Nähe der Brennpflächen. Wir werden diese Diskussion in § 11 durchführen.

§ 8.

Für ein beliebiges Strahlenbündel, dessen Kennfläche $\xi = \xi(v, w)$ ist, war

$$(1) \quad u_P = \frac{ik}{2\pi} \int e^{ik(\xi_P - \xi(v, w), \mathfrak{R}(v, w))} K(v, w) d\sigma,$$

wo die Integration über den ganzen dem geometrisch-optischen Strahlenbündel entsprechenden Bereich der Kennfläche zu erstrecken ist.¹⁾ In dieser Formel tritt die Größe $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ auf, wo λ die Wellenlänge des Lichtes ist. Nun läßt sich bekanntlich die geometrische Optik als Grenzfall der Wellenoptik auffassen, bei der die Wellenlänge des Lichtes unendlich klein ist. Aus (1) müssen sich demnach die geometrisch-optischen Verhältnisse ergeben, wenn dort $\lambda = 0$, also $k \rightarrow \infty$ gesetzt wird.

Bevor wir diesen Übergang vollziehen, setzen wir $(\xi_P - \xi(v, w), \mathfrak{R}(v, w)) = \zeta$ und denken uns auf der Kennfläche $\xi = \xi(v, w)$ die Kurven $\zeta = \text{const}$ gezeichnet. Geometrisch heißt dies: wir projizieren die Verbindungslinien des Aufpunktes mit den einzelnen Flächenpunkten auf die zu diesen gehörigen Normalen (Lichtstrahlen) und verbinden alle diejenigen Flächenpunkte, für die diese Projektion gleichen Wert hat. Für diejenigen Punkte (v, w) unserer Kennfläche, die zwischen den Kurven ζ und $\zeta + d\zeta$ liegen, können wir ζ als konstant annehmen, so daß:

$$\int_{\zeta}^{\zeta+d\zeta} e^{ik(\xi_P - \xi(v, w), \mathfrak{R}(v, w))} K(v, w) d\sigma = e^{ik\zeta} \cdot \int_{\zeta}^{\zeta+d\zeta} K(v, w) d\sigma.$$

Setzen wir nun

$$(2) \quad \int_{\zeta}^{\zeta+d\zeta} K(v, w) d\sigma = dF(\zeta) = \frac{dF}{d\zeta} \cdot d\zeta,$$

1) Der in § 3 erwähnte, die Lichtverteilung auf der unendlich fernen Wellenfläche bestimmende Faktor $\psi(v, w)$ ist hier fortgelassen. Seine Hinzunahme ändert an den folgenden Überlegungen nichts. Wir können ihn mit $K(v, w)$ vereinigt denken.

so erhalten wir:

$$u_P = \frac{ik}{2\pi} \cdot \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \frac{dF}{d\zeta} \cdot e^{ik\zeta} d\zeta,$$

wo ζ_1 und ζ_2 die äußersten Werte von ζ bezeichnen, die auf $d\sigma$ erreicht werden.

Nun gilt, solange $dF/d\zeta$ im ganzen Integrationsgebiet endlich und stetig ist, die Beziehung¹⁾:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} k \cdot \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \frac{dF}{d\zeta} \cdot e^{ik\zeta} d\zeta = -i \left[\frac{dF}{d\zeta} \cdot e^{ik\zeta} \right]_{\zeta_1}^{\zeta_2}. \quad (3)$$

Wir untersuchen zunächst das Verhalten von $dF/d\zeta$ im Integrationsgebiet. Zu diesem Zwecke betrachten wir $d\zeta$. Es ist stets

$$d\zeta = \frac{\partial \zeta}{\partial v} \cdot dv + \frac{\partial \zeta}{\partial w} \cdot dw.$$

Es wird

$$\frac{\partial \zeta}{\partial v} = - \left(\frac{\partial \xi(v, w)}{\partial v}, \Re(v, w) \right) + \left(\xi_P - \xi(v, w), \frac{\partial \Re(v, w)}{\partial v} \right)$$

oder, da

$$\Re(v, w) \perp \frac{\partial \xi(v, w)}{\partial v}$$

ist,

$$\frac{\partial \zeta}{\partial v} = \left(\xi_P - \xi(v, w), \frac{\partial \Re(v, w)}{\partial v} \right)$$

und analog

$$\frac{\partial \zeta}{\partial w} = \left(\xi_P - \xi(v, w), \frac{\partial \Re(v, w)}{\partial w} \right)$$

Beide partiellen Ableitungen von $\zeta = \zeta(v, w)$ verschwinden nun zusammen dann und nur dann, wenn die Vektoren $\xi_P - \xi(v, w)$ und $\Re(v, w)$ zusammenfallen, da ja

$$\frac{\partial \Re(v, w)}{\partial v} \quad \text{und} \quad \frac{\partial \Re(v, w)}{\partial w}$$

auf $\Re(v, w)$ senkrecht stehen. In diesem Falle wird demnach auch $d\zeta = 0$. Hieraus und aus (2) folgt, daß — falls der Aufpunkt auf einem Lichtstrahl des betrachteten Strahlenbündels liegt — der Wert $dF/d\zeta$ für denjenigen Wert von ζ unendlich wird, in dem der durch den Aufpunkt gehende Lichtstrahl die Kennfläche trifft.

Liegt der Aufpunkt dagegen im geometrisch-optischen

1) G. Kirchhoff, Vorlesungen über math. Optik, Leipzig 1891, S. 35. Die Betrachtungen dieses Paragraphen entsprechen ganz der dortigen Darstellung.

Schatten, so bleibt im ganzen Integrationsgebiet $dF/d\zeta$ endlich und stetig. Wir können dann also (8) anwenden. Nehmen wir nun an, daß die Begrenzung des durch das geometrisch-optische Strahlenbündel gegebenen Integrationsgebietes der Kennfläche $\zeta = \zeta(v, w)$ auf keiner endlichen Strecke mit den Kurven $\zeta = \zeta_1$ und $\zeta = \zeta_2$ zusammenfällt¹⁾, so verschwindet der in (8) auf der rechten Seite stehende Ausdruck, da in diesem Falle die zwischen den Grenzen ζ_1 und $\zeta_1 + d\zeta$ bzw. $\zeta_2 - d\zeta$ und ζ_2 zu nehmenden Integrale (2) von höherer Ordnung unendlich klein werden als $d\zeta$.²⁾ Wir erhalten also als Resultat, daß für die im geometrisch-optischen Schatten liegenden Aufpunkte $u_p = 0$ wird.

Für den anderen Fall, daß der Aufpunkt im Gebiete des geometrisch-optischen Strahlenbündels liegt, daß also durch ihn ein oder mehrere Lichtstrahlen hindurchgehen, denken wir uns auf der Kennfläche um die Fußpunkte der betreffenden Lichtstrahlen kleine Gebiete zweckentsprechend abgegrenzt und führen dann die Integration einmal über diese kleinen Gebiete, zweitens über die übrigen Teile der Kennfläche aus. Diese letzte Integration ergibt, da hier $dF/d\zeta$ endlich und stetig bleibt, also (8) angewandt werden darf, wie oben den Wert Null. Wir brauchen also nur die Integrale über jene kleinen Gebiete auszuführen. Wir erkennen, daß sich für Aufpunkte, die im Gebiete des geometrisch-optischen Strahlenbündels liegen, der Wert u_p ergibt, indem man die durch ihn hindurchgehenden Lichtstrahlen zur Interferenz bringt.

§ 9.

Wir haben nun noch den Übergang zu den Feldvektoren \mathcal{E} und \mathcal{H} zu machen. Zu diesem Zwecke fassen wir u_p als eine Komponente des vom Phasenfaktor $e^{i\tau t}$ befreiten Herzschen Vektors \mathcal{B} auf. Dann ist bekanntlich:

$$\mathcal{E} = e^{i\tau t} \cdot \text{rot rot } \mathcal{B} = e^{i\tau t} \cdot \{\text{grad div } \mathcal{B} + k^2 \mathcal{B}\}$$

$$\mathcal{H} = e^{i\tau t} \cdot i k \cdot \text{rot } \mathcal{B}$$

bzw.

$$\mathcal{E} = -e^{i\tau t} \cdot i k \cdot \text{rot } \mathcal{B}$$

$$\mathcal{H} = e^{i\tau t} \cdot \text{rot rot } \mathcal{B} = e^{i\tau t} \cdot \{\text{grad div } \mathcal{B} + k^2 \mathcal{B}\}$$

1) Vgl. Anm. 1 auf S. 739.

2) M. v. Laue, Encykl. d. math. Wiss. V, H. 24, Artikel „Wellenoptik“, S. 438.

In § 6 hatten wir gesehen, daß wir als allgemeine Lösung eines beliebigen Strahlenbündels die Integraldarstellung

$$u_P = \frac{ik}{2\pi} \cdot \iint e^{ik[x_P \cdot \alpha(v,w) + y_P \cdot \beta(v,w) + z_P \cdot \gamma(v,w)]} \varphi(v,w) dv dw$$

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$$

oder anders geschrieben:

$$u_P = \frac{ik}{2\pi} \cdot \iint e^{ik[x_P \cdot \alpha + y_P \cdot \beta + z_P \cdot \gamma - f(\beta, \gamma)]} \psi(\beta, \gamma) \frac{d\beta d\gamma}{\alpha}$$

$$\alpha = \sqrt{1 - \beta^2 - \gamma^2}$$

ansprechen können. Setzen wir nun beispielsweise

$$\beta_x = 0; \beta_y = 0; \beta_z = u_P,$$

so erhalten wir mit dem ersten der beiden Ansätze für \mathfrak{E} und \mathfrak{H} :

$$\begin{aligned}\mathfrak{E}_x &= -e^{i\gamma t} \cdot k^2 \cdot \iint \alpha \cdot \gamma \cdot \Phi(\beta, \gamma) d\beta d\gamma \\ \mathfrak{E}_y &= -e^{i\gamma t} \cdot k^2 \cdot \iint \beta \cdot \gamma \cdot \Phi(\beta, \gamma) d\beta d\gamma \\ \mathfrak{E}_z &= +e^{i\gamma t} \cdot k^2 \cdot \iint (1 - \gamma^2) \cdot \Phi(\beta, \gamma) d\beta d\gamma \\ \mathfrak{H}_x &= +e^{i\gamma t} \cdot k^2 \cdot \iint \beta \cdot \Phi(\beta, \gamma) d\beta d\gamma \\ \mathfrak{H}_y &= -e^{i\gamma t} \cdot k^2 \cdot \iint \alpha \cdot \Phi(\beta, \gamma) d\beta d\gamma \\ \mathfrak{H}_z &= 0,\end{aligned}$$

wo

$$\Phi(\beta, \gamma) = e^{ik[x_P \cdot \alpha + y_P \cdot \beta + z_P \cdot \gamma - f(\beta, \gamma)]} \psi(\beta, \gamma) \cdot \frac{1}{\alpha}$$

gesetzt ist.

Unter Berücksichtigung der in § 8 durchgeführten Betrachtungen können wir nun, falls durch den Aufpunkt nur ein einziger Lichtstrahl hindurchgeht, in erster Annäherung die Faktoren α, β, γ für das ganze Integrationsgebiet konstant setzen, nämlich gleich den dem entsprechenden Lichtstrahl zugehörigen Werten $\alpha_P, \beta_P, \gamma_P$. Die Berechtigung hierzu erkennt man auch geometrisch sehr leicht, wenn man beachtet, daß die Funktion $\Phi(\beta, \gamma)$ eine schnell oszillierende Funktion ist außer in der Umgebung des Wertepaares (β_P, γ_P) , daß also — wie wir in § 8 sahen — nur diese Umgebung merkliche Beiträge zu u_P liefert, daß ferner β, γ und demnach auch α bei nicht zu großer Öffnung des Bündels — mindestens aber während jeder einzelnen sich nahezu vernichtenden Oszillationsperiode der Funktion $\Phi(\beta, \gamma)$ — nur sehr wenig veränderlich sind. Wir können demnach für \mathfrak{E} und \mathfrak{H} , wenn wir noch von dem bei der Mittelwertbildung fortfallenden Phasenfaktor $e^{i\gamma t}$ absehen, in erster Annäherung schreiben:

$$\mathfrak{E}_x = -k^2 \cdot \alpha_P \cdot \gamma_P \cdot u_P; \quad \mathfrak{E}_y = -k^2 \cdot \beta_P \cdot \gamma_P \cdot u_P; \quad \mathfrak{E}_z = +k^2 \cdot (1 - \gamma_P^2) \cdot u_P; \\ \mathfrak{H}_x = +k^2 \cdot \beta_P \cdot \gamma_P \cdot u_P; \quad \mathfrak{H}_y = -k^2 \cdot \alpha_P \cdot u_P; \quad \mathfrak{H}_z = 0.$$

Für die Größen \mathfrak{E}^2 , \mathfrak{H}^2 , $[[\mathfrak{E} \mathfrak{H}]]$, die für die Intensität maßgebend sind (je nach der Art des verwandten Meßinstrumentes), erhalten wir dann in gleicher Näherung:

$$\mathfrak{E}^2 = \mathfrak{H}^2 = [[\mathfrak{E} \mathfrak{H}]] = k^4 \cdot u_P^2 \cdot (1 - \gamma_P^2),$$

so daß wir die Intensität in erster Annäherung dem Quadrat des absoluten Betrages von u_P proportional setzen dürfen.

Ganz ähnliche Überlegungen gelten für den zweiten der oben gemachten Ansätze von \mathfrak{E} und \mathfrak{H} .

Gehen durch den Aufpunkt mehrere Lichtstrahlen im geometrisch-optischen Sinne, so modifizieren sich die angestellten Betrachtungen etwas. Doch können wir bei kleiner Öffnung des Strahlenbündels allgemein in gewisser Näherung die Intensität dem Quadrat des absoluten Betrages von u_P proportional setzen.

§ 10.

Bevor wir dazu übergehen, die Lichterscheinungen in der Nähe der Kaustik zu untersuchen, wollen wir einige Bemerkungen über deren Gestalt einschalten. Sei uns zunächst ein beliebiges Strahlenbündel gegeben, so können wir dessen geometrisch-optische Wellenflächen analytisch darstellen durch

$$x = -\frac{1}{2} \left[\frac{y^2}{\varrho_1} + \frac{z^2}{\varrho_2} \right] - \frac{1}{6} \left[y^3 \cdot \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\varrho_1} \right) + 3y^2 z \cdot \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\varrho_1} \right) \right. \\ \left. + 3yz^2 \cdot \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\varrho_2} \right) + z^3 \cdot \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\varrho_2} \right) \right] - \dots$$

wofür wir auch schreiben können:

$$x = -\frac{1}{2} [\varrho_1 \cdot \beta^2 + \varrho_2 \cdot \gamma^2] + \frac{1}{6} \left[\beta^3 \cdot \frac{\partial \varrho_1}{\partial \beta} + 3\beta^2 \gamma \cdot \frac{\partial \varrho_1}{\partial \gamma} \right. \\ \left. + 3\beta \gamma^2 \cdot \frac{\partial \varrho_2}{\partial \beta} + \gamma^3 \cdot \frac{\partial \varrho_2}{\partial \gamma} \right] + \dots \\ y = \varrho_1 \cdot \beta, \\ z = \varrho_2 \cdot \gamma.$$

Hierin bedeuten ϱ_1 und ϱ_2 wieder die Krümmungsradien der Fläche in dem Punkte, in dem sie von der Achse des Strahlenbündels geschnitten wird, positiv genommen, wenn die Wellenfläche dem einfallenden Lichte die konvexe Seite zukehrt. Häufig wird es genügen, bei den quadratischen Gliedern der Entwicklung stehen zu bleiben, also zu schreiben

$$(1) \quad \mathfrak{x} = \mathfrak{x}(\beta, \gamma) = \{-\frac{1}{2}[\varrho_1 \beta^2 + \varrho_2 \gamma^2]; \varrho_1 \beta; \varrho_2 \gamma\}.$$

Wir wollen jedoch ausdrücklich bemerken, daß die verschiedenen Wellenflächen eines Strahlenbündels sich durch diese Beziehung verschieden gut annähern lassen, wie man leicht einsieht, wenn man beachtet, daß die Wellenflächen des Bündels einander parallel sind, was für die durch (1) dargestellten Paraboloiden nicht zutrifft, wenn man dort ϱ_1 und ϱ_2 jeweils den betreffenden Wellenflächen entsprechend wählt. Während zu allen zu einem Strahlenbündel gehörenden Wellenflächen die gleichen Krümmungsmittelpunktsflächen, nämlich die Kaustiken des Strahlenbündels, gehören, ist dies für die entsprechenden Paraboloiden, die aus (1) hervorgehen, wenn sich ϱ_1 und ϱ_2 um konstante Werte ändern, nicht der Fall. Wir wählen daher als „angenäherte“ Kennfläche dasjenige Paraboloid, dessen Kaustik sich derjenigen unseres Strahlenbündels am besten anpaßt.

Um nun die Brennflächen dieses Paraboloids zu untersuchen, ist es vorteilhaft, nicht von der Darstellung (1) auszugehen, da dies zu ziemlich komplizierten Ausdrücken führt, sondern die Gleichung des Paraboloids anzusetzen in der Form:

$$(2) \quad \begin{cases} x = -\frac{1}{2}(w + v); & y = \pm \sqrt{\varrho_1 \cdot w \cdot \left(1 + \frac{v}{2a}\right)}; \\ & z = \pm \sqrt{\varrho_2 \cdot v \cdot \left(1 - \frac{w}{2a}\right)}, \end{cases}$$

worin:

$$\varrho_2 > \varrho_1; \quad 2a = \varrho_2 - \varrho_1 > 0; \quad -2a < v < +\infty; \quad -\infty < w < +2a.$$

Die Koordinaten x, y, z nehmen nur für gewisse Wertebereiche von v und w gleichzeitig reelle Beträge an, stellen also nur für diese Bereiche reelle Flächen dar. Die Bereiche von v und w , die für die Darstellung in Frage kommen, sind abhängig vom Vorzeichen von ϱ_1 und ϱ_2 . Es wird für

$$\varrho_1 > 0; \quad \varrho_2 > 0 \text{ (elliptisches Paraboloid, nach links geöffnet)} \\ 0 \leq v < +\infty; \quad 0 \leq w < +2a;$$

$$\varrho_1 < 0; \quad \varrho_2 > 0 \text{ (hyperbolisches Paraboloid)} \\ 0 \leq v < +\infty; \quad -\infty < w \leq 0;$$

$$\varrho_1 < 0; \quad \varrho_2 < 0 \text{ (elliptisches Paraboloid, nach rechts geöffnet)} \\ -2a < v \leq 0; \quad -\infty < w \leq 0.$$

Die Kurven $v = \text{const}$ und $w = \text{const}$ sind die Krümmungslinien der betreffenden Paraboloiden.

Bezeichnen wir die Krümmungsradien des Paraboloids im Punkte (v, w) durch $\bar{\varrho}_1$ bzw. $\bar{\varrho}_2$, so gilt für diese:

$$\bar{\varrho}_1 = (w + \varrho_1) \cdot \sqrt{\frac{(w + \varrho_1)(v + \varrho_2)}{\varrho_1 \varrho_2}}; \quad \bar{\varrho}_2 = (v + \varrho_2) \cdot \sqrt{\frac{(w + \varrho_1)(v + \varrho_2)}{\varrho_1 \varrho_2}}.$$

Für die Richtungskosinus der Normalen erhalten wir:

$$N_x = \sqrt{\frac{\varrho_1 \varrho_2}{(w + \varrho_1)(v + \varrho_2)}}; \quad N_y = N_x \cdot \sqrt{\frac{w}{\varrho_1} \cdot \left(1 + \frac{v}{2a}\right)} = N_x \cdot \frac{y}{\varrho_1};$$

$$N_z = N_x \cdot \sqrt{\frac{v}{\varrho_2} \cdot \left(1 - \frac{w}{2a}\right)} = N_x \cdot \frac{z}{\varrho_2}.$$

Die Gleichungen der Schalen der Kaustik lauten demnach:

$$x_1 = -\frac{1}{2} \cdot (3w + v + 2\varrho_1),$$

$$y_1 = \mp w \cdot \sqrt{\frac{w}{\varrho_1} \cdot \left(1 + \frac{v}{2a}\right)},$$

$$z_1 = \pm (2a - w) \cdot \sqrt{\frac{v}{\varrho_2} \cdot \left(1 - \frac{w}{2a}\right)}$$

bzw.

$$x_2 = -\frac{1}{2} \cdot (3v + w + 2\varrho_2),$$

$$y_2 = \mp (2a + v) \cdot \sqrt{\frac{w}{\varrho_1} \cdot \left(1 + \frac{v}{2a}\right)},$$

$$z_2 = \mp v \cdot \sqrt{\frac{v}{\varrho_2} \cdot \left(1 - \frac{w}{2a}\right)}.$$

Für $v = 0$, d. h. im Schnitte mit der xy -Ebene, folgt hieraus:

$$y_1^2 = -\frac{8}{27\varrho_1} \cdot (x_1 + \varrho_1)^3 \quad \text{bzw.} \quad y_2^2 = -\frac{8a^2}{\varrho_1} \cdot (x_2 + \varrho_2).$$

Entsprechend ergibt sich für $w = 0$, d. h. im Schnitte mit der xz -Ebene:

$$z_1^2 = -\frac{8a^2}{\varrho_2} \cdot (x_1 + \varrho_1) \quad \text{bzw.} \quad z_2^2 = -\frac{8}{27\varrho_2} \cdot (x_2 + \varrho_2)^3.$$

In Fig. 5 ist versucht, die Form der beiden Brennflächen eines nach rechts geöffneten Paraboloids zu veranschaulichen,



Fig. 5.

wie es etwa einem astigmatischen Strahlenbündel entspricht, bei dem die „Randstrahlen“ stärker konvergieren als die „Paraxialstrahlen“.

Gehen wir vom astigmatischen zum achsensymmetrischen asphärischen Strahlenbündel über, so können wir wieder als angenäherte Kennfläche dasjenige Rotationsparaboloid betrachten, dessen Krümmungsmittelpunktsflächen sich den Brennflächen unseres Strahlenbündels — die eine von ihnen ist zu einer mit einem Teile der Achse des Bündels zusammenfallenden geraden Linie ausgeartet — am besten annähern. Die oben für das elliptische bzw. hyperbolische Paraboloid aufgestellten bzw. abgeleiteten Gleichungen versagen jedoch beim Übergang zu $\varrho_1 = \varrho_2$. Sie nehmen unbestimmte Form an. Setzen wir jedoch $w = 2a \cdot \bar{w}$ und $v = \varrho_1 \cdot \bar{v}$, so sind die oben aufgestellten und abgeleiteten Formeln auch für das *nach links geöffnete*¹⁾ Rotationsparaboloid gültig, da dann die Unbestimmtheit verschwindet. Die Gleichungen der Brennflächen des (beliebigen) Paraboloids lauten dann:

$$x_1 = -3a\bar{w} - \varrho_1 \cdot \left(1 + \frac{\bar{v}}{2}\right),$$

$$y_1 = \mp a\bar{w} \cdot \sqrt{\bar{w} \cdot \left(\frac{2a}{\varrho_1} + \bar{v}\right)},$$

$$z_1 = \pm 2a(1 - \bar{w}) \cdot \sqrt{\frac{\varrho_1}{\varrho_2} \cdot \bar{v} \cdot (1 - \bar{w})},$$

bzw.

$$x_2 = -\frac{3}{2}\varrho_1\bar{v} - a\bar{w} - \varrho_2,$$

$$y_2 = \mp (2a + \varrho_1\bar{v}) \cdot \sqrt{\bar{w} \cdot \left(\frac{2a}{\varrho_1} + \bar{v}\right)},$$

$$z_2 = \mp \varrho_1\bar{v} \cdot \sqrt{\frac{\varrho_1}{\varrho_2} \cdot \bar{v} \cdot (1 - \bar{w})},$$

wo jetzt für $\varrho_1 > 0$; $\varrho_2 > 0$ die Veränderlichkeitsbereiche gelten

$$0 \leq \bar{v} < +\infty; \quad 0 \leq \bar{w} < +1,$$

für $\varrho_1 < 0$; $\varrho_2 > 0$, $-\infty < \bar{v} \leq 0$; $-\infty < \bar{w} \leq 0$,

für $\varrho_1 < 0$; $\varrho_2 < 0$, $0 \leq \bar{v} < \left|\frac{2a}{\varrho_1}\right|$; $-\infty < \bar{w} \leq 0$.

Gehen wir jetzt zum Rotationsparaboloid $\varrho_1 = \varrho_2 > 0$ über, so ergeben sich für die „Brennflächen“ die Gleichungen, wenn wir noch $\varrho_1 = \varrho_2 = \varrho$ schreiben und berücksichtigen, daß jetzt $2a = 0$ ist:

1) Für das *nach rechts geöffnete* Rotationsparaboloid ist entsprechend zu setzen:

$$w = \varrho_2 \cdot \bar{w} \text{ und } v = -2a \cdot \bar{v}.$$

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= -\varrho \cdot \left(1 + \frac{\bar{v}}{2}\right) \\ y_1 &= 0 \\ z_1 &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ bzw. } \left\{ \begin{aligned} x_2 &= -\varrho \cdot \left(1 + \frac{3}{2}\bar{v}\right), \\ y_2 &= \mp \varrho \cdot \bar{v} \cdot \sqrt{\bar{v} \cdot \bar{w}}, \\ z_2 &= \mp \varrho \cdot \bar{v} \cdot \sqrt{\bar{v} \cdot (1 - \bar{w})}. \end{aligned} \right.$$

Schreiben wir noch $\bar{v} = \operatorname{tg}^2 \vartheta$; $\bar{w} = \cos^2 \varphi$, so gehen diese Gleichungen über in die bekannten Gleichungen der Evolutenschalen eines Rotationsparaboloids:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= -\varrho \cdot \left(1 + \frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 \vartheta\right) \\ y_1 &= 0 \\ z_1 &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ bzw. } \left\{ \begin{aligned} x_2 &= -\varrho \cdot \left(1 + \frac{3}{2}\operatorname{tg}^2 \vartheta\right), \\ y_2 &= \mp \varrho \cdot \operatorname{tg}^3 \vartheta \cdot \cos \varphi, \\ z_2 &= \mp \varrho \cdot \operatorname{tg}^3 \vartheta \cdot \sin \varphi. \end{aligned} \right.$$

Fig. 6 zeigt die Gestalt der Brennflächen des Rotationsparaboloids, d. h. eines achsensymmetrischen Strahlenbündels,



Fig. 6.

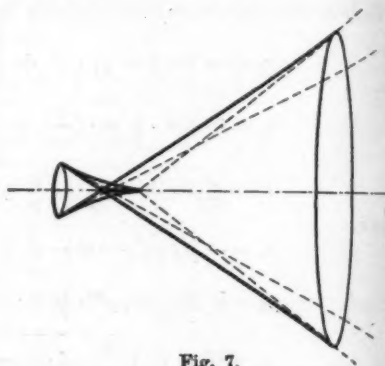


Fig. 7.

dessen Randstrahlen wie oben stärker konvergieren als seine Paraxialstrahlen.

Bei den sogenannten „sphärisch korrigierten“ optischen Systemen, die so bestimmt sind, daß die einem bestimmten Öffnungswinkel $\hat{\vartheta}$ zugehörigen Randstrahlen denselben Brennpunkt besitzen wie die Paraxialstrahlen, nimmt nach Berek und Driesen¹⁾ die Kaustik die in Fig. 7 dargestellte Gestalt an.

1) M. Berek u. A. Driesen, Über die Kaustik in der Achse sphärisch korrigierter Systeme, Centr.-Zeit. f. Opt. u. Mech. 41. S. 325. 1920. Dort ist auch die Gleichung der Kaustik sowie die der zugehörigen Lichtstrahlen gegeben. Außerdem sind Literaturangaben über Katakaustiken und Diakaustiken gegeben.

In den Figg. 8a und 8b sind zu den Brennflächen des „sphärisch unkorrigierten“ und des „sphärisch korrigierten“ achsensymmetrischen Strahlenbündels einige geometrisch-optische Wellenflächen gezeichnet. Wir sehen, daß diese in der Gegend der Brennflächen selbst eine Form annehmen,



Fig. 8a.

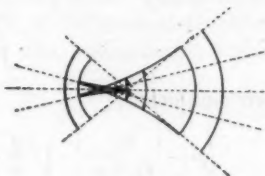


Fig. 8b.

die sie für eine Wahl als Kennfläche des Strahlenbündels wenig geeignet erscheinen läßt. Liegt dagegen die Kaustik ganz auf der einen Seite der geometrisch-optischen Wellenfläche, so nimmt diese eine sehr einfache Form an, worauf wir oben bereits kurz hingewiesen haben.

§ 11.

In § 10 hatten wir gesehen, daß ein beliebiges astigmatisches Strahlenbündel in erster Näherung ersetzt werden kann durch ein solches, dessen Brennflächen die Evolutenschalen eines elliptischen oder hyperbolischen Paraboloids sind. Die Gleichung (7) des § 7 gab uns die Integraldarstellung dieses Strahlenbündels, kann also als näherungsweise Darstellung eines beliebigen Strahlenbündels aufgefaßt werden. Seine Diskussion gibt uns daher nicht nur Aufschluß über die Lichtverhältnisse in dem speziellen Strahlenbündel, sondern auch die ungefähren Lichtverhältnisse eines beliebigen Strahlenbündels, wenigstens soweit es sich um „sphärisch unkorrigierte“ astigmatische Bündel handelt. (Der Ausdruck „sphärisch unkorrigiert“ ist hier in sinngemäßer Übertragung auf astigmatische Bündel zu verstehen.)

Statt der strengen Lösung (7) des § 7 können wir bei nicht zu großem Öffnungswinkel des Strahlenbündels schreiben¹⁾:

1) Den Integralausdruck (1) können wir genauer nach § 6 als Lösung für ein Strahlenbündel ansprechen, dessen Kennfläche den Gleichungen

$$(1) \quad u_P = \frac{ik}{2\pi} \cdot \int_{-\beta_1 - \gamma_1}^{+\beta_1 + \gamma_1} e^{ik} \left[x_P - x_P \cdot \frac{\beta^2}{2} - x_P \cdot \frac{\gamma^2}{2} + y_P \cdot \beta + x_P \cdot \gamma - \varrho_1 \cdot \frac{\beta^2}{2} - \varrho_1 \cdot \frac{\gamma^2}{2} \right] d\beta d\gamma.$$

$$u_P = \frac{ik}{2\pi} \cdot e^{ikx_P} \cdot \int_{-\beta_1}^{+\beta_1} e^{-\frac{ik}{2} \cdot [(x_P + \varrho_1) \beta^2 - 2y_P \beta]} d\beta$$

$$\cdot \int_{-\gamma_1}^{+\gamma_1} e^{-\frac{ik}{2} \cdot [(x_P + \varrho_1) \gamma^2 - 2x_P \gamma]} d\gamma.$$

Setzen wir nunmehr

$$\left(\beta - \frac{y_P}{x_P + \varrho_1} \right) \cdot \sqrt{\frac{k}{\pi} \cdot |x_P + \varrho_1|} = \delta,$$

$$\left(\gamma - \frac{x_P}{x_P + \varrho_1} \right) \cdot \sqrt{\frac{k}{\pi} \cdot |x_P + \varrho_1|} = \varepsilon,$$

so geht dies über in

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} u_P &= \frac{i}{2} \cdot \frac{e^{ik} \left[x_P + \frac{1}{2} \cdot \frac{y_P^2}{x_P + \varrho_1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{x_P^2}{x_P + \varrho_1} \right]}{\sqrt{|x_P + \varrho_1|} \cdot |x_P + \varrho_1|} \\ &\quad \cdot \int_{s_{11}}^{s_{12} + i \frac{\pi}{2}} e^{i \frac{\pi}{2} \delta^2} d\delta \cdot \int_{s_{21}}^{s_{22} + i \frac{\pi}{2}} e^{i \frac{\pi}{2} \varepsilon^2} d\varepsilon. \end{aligned} \right.$$

$$(2^*) \quad \left\{ \begin{aligned} u_P &= \frac{2ik}{\pi} \cdot \beta_1 \cdot \gamma_1 \cdot e^{ik} \left[x_P + \frac{1}{2} \cdot \frac{y_P^2}{x_P + \varrho_1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{x_P^2}{x_P + \varrho_1} \right] \\ &\quad \cdot \frac{1}{s_{12} - s_{11}} \cdot \int_{s_{11}}^{s_{12} + i \frac{\pi}{2}} e^{i \frac{\pi}{2} \delta^2} d\delta \cdot \frac{1}{s_{22} - s_{21}} \cdot \int_{s_{21}}^{s_{22} + i \frac{\pi}{2}} e^{i \frac{\pi}{2} \varepsilon^2} d\varepsilon, \end{aligned} \right.$$

wo

$$s_{11} = \left(-\beta_1 - \frac{y_P}{x_P + \varrho_1} \right) \cdot \sqrt{\frac{k}{\pi} \cdot |x_P + \varrho_1|},$$

$$s_{12} = \left(+\beta_1 - \frac{y_P}{x_P + \varrho_1} \right) \cdot \sqrt{\frac{k}{\pi} \cdot |x_P + \varrho_1|},$$

$$x = -\frac{\alpha}{2} (\varrho_1 \beta^2 + \varrho_2 \gamma^2); \quad y = \frac{\beta}{2} (2\varrho_1 - \varrho_1 \beta^2 - \varrho_2 \gamma^2);$$

$$z = \frac{\gamma}{2} (2\varrho_2 - \varrho_1 \beta^2 - \varrho_2 \gamma^2)$$

genügt, und für welches die Lichtverteilung auf der unendlich fernen Wellenfläche durch den Faktor $\sqrt{1 - \beta^2 - \gamma^2}$ bestimmt wird.

$$s_{21} = \left(-\gamma_1 - \frac{\pi_P}{x_P + \varrho_1} \right) \cdot \sqrt{\frac{k}{\pi} \cdot |x_P + \varrho_1|},$$

$$s_{22} = \left(+\gamma_1 - \frac{\pi_P}{x_P + \varrho_1} \right) \cdot \sqrt{\frac{k}{\pi} \cdot |x_P + \varrho_1|}$$

und im Exponenten des Integranden das $-$ -Zeichen zu nehmen ist, wenn die in $s_{\kappa 1}$; $s_{\kappa 2}$ ($\kappa = 1, 2$) auftretende Größe $x_P + \varrho_\kappa > 0$ ist. Ist $x_P + \varrho_\kappa < 0$, so gilt das $+$ -Zeichen.

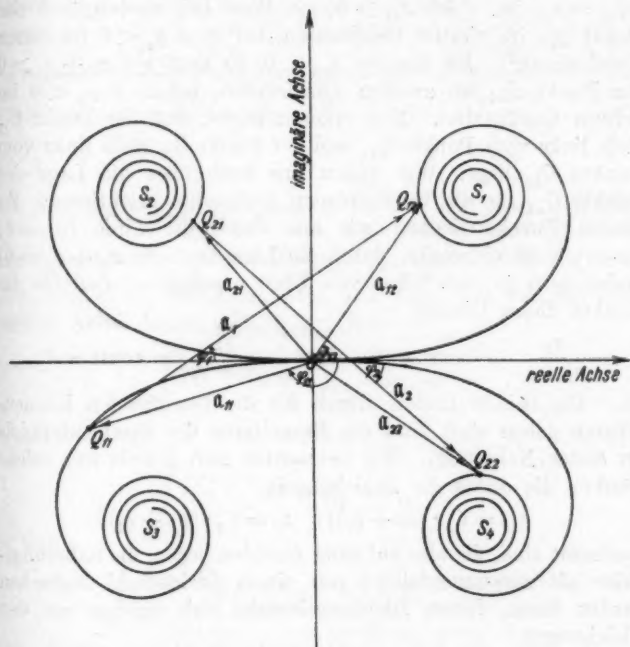


Fig. 9.

Zur Diskussion von (2*) benutzen wir die Cornusche Spirale (Fig. 9). Bekanntlich sind der reelle und imaginäre

Teil des Fresnelschen Integrals $\int_0^s e^{\mp i \frac{\pi}{2} \delta^2} d\delta$ gleich der reellen

bzw. imaginären Koordinate eines Punktes der in der komplexen Ebene $\xi + i \cdot \eta$ gezeichneten Cornuschen Spirale. Ihre

Bogenlänge vom Nullpunkte bis zu dem durch $\int_0^{\delta} \mp i \frac{\pi}{2} \delta^2 d\delta$ bestimmten Kurvenpunkte ist gleich s .¹⁾

Wir wählen nun hier die vier Punkte Q_{11} , Q_{12} , Q_{21} , Q_{22} so, daß die vom Nullpunkt der Spirale aus gemessenen Bogenlängen bis zu den betreffenden Punkten den Werten s_{11} , s_{12} , s_{21} , s_{22} entsprechen, daß also $\widehat{OQ}_{11} = s_{11}$, $\widehat{OQ}_{12} = s_{12}$, $\widehat{OQ}_{21} = s_{21}$, $\widehat{OQ}_{22} = s_{22}$ ist. Ist $s_{n\lambda} > 0$, so liegt bei $x_P + \varrho_n > 0$ der Punkt $Q_{n\lambda}$ im vierten Quadranten, bei $x_P + \varrho_n < 0$ im ersten Quadranten.²⁾ Ist dagegen $s_{n\lambda} < 0$, so liegt bei $x_P + \varrho_n > 0$ der Punkt $Q_{n\lambda}$ im zweiten Quadranten, bei $x_P + \varrho_n < 0$ im dritten Quadranten. Man erkennt leicht, daß der Punkt Q_{11} stets links vom Punkte Q_{12} und der Punkt Q_{21} stets links vom Punkte Q_{22} liegt. Wir wollen uns noch über die Lage der Punkte $Q_{n\lambda}$ für die verschiedenen Aufpunkte orientieren. Zu diesem Zwecke denken wir uns durch die Linie ($y_P = 0$; $x_P + \varrho_1 = 0$) einerseits, durch die Linie ($z_P = 0$; $x_P + \varrho_2 = 0$) andererseits je eine Schar von Ebenen gelegt, so daß für die Punkte dieser Ebenen

$$\frac{y_P}{x_P + \varrho_1} = \text{const} = C_1 \quad \text{bzw.} \quad \frac{z_P}{x_P + \varrho_2} = \text{const} = C_2$$

ist. Die beiden Linien, durch die die betreffenden Ebenenscharen gelegt sind, sind die Brennpunkte des Strahlenbündels (in erster Näherung). Wir betrachten nun jeweils nur solche Punkte, die durch die Beziehungen

$$y_P = C_1 \cdot (x_P + \varrho_1); \quad z_P = C_2 \cdot (x_P + \varrho_2)$$

bestimmt sind, die also auf einer Geraden liegen, die näherungsweise als zusammenfallend mit einem Lichtstrahl angesehen werden kann, dessen Richtungskosinus sich ergeben aus den Gleichungen

$$\begin{aligned} \alpha (= \alpha_P) &= \frac{1}{\sqrt{1 + C_1^2 + C_2^2}}, \\ \beta (= \beta_P) &= \frac{C_1}{\sqrt{1 + C_1^2 + C_2^2}}, \\ \gamma (= \gamma_P) &= \frac{C_2}{\sqrt{1 + C_1^2 + C_2^2}}. \end{aligned}$$

1) Siehe z. B. M. v. Laue, Encykl. d. math. Wiss. V, H. 24, Artikel „Wellenoptik“, S. 432 und P. Debye, a. a. O., S. 765.

2) $\alpha = 1, 2$; $\lambda = 1, 2$.

Umgekehrt ist $C_1 = \frac{\beta}{\alpha}$; $C_2 = \frac{\gamma}{\alpha}$. Das betrachtete Strahlenbündel war begrenzt durch die Beziehungen $-\beta_1 \leq \beta \leq +\beta_1$; $-\gamma_1 \leq \gamma \leq +\gamma_1$. Wir können folgende Tabelle aufstellen, die die Abhängigkeit des Vorzeichens der Größe $s_{\kappa 1}$ und damit die Lage der Punkte $Q_{\kappa 1}$ von der Größe der die Richtung des Lichtstrahles bestimmenden Konstanten C_1 und C_2 erkennen läßt.

	$C_1 < -\beta_1$	$C_1 = -\beta_1$	$-\beta_1 < C_1 < +\beta_1$	$C_1 = +\beta_1$	$C_1 > +\beta_1$
s_{11}	> 0	$= 0$	< 0	< 0	< 0
s_{12}	> 0	> 0	> 0	$= 0$	< 0

	$C_2 < -\gamma_1$	$C_2 = -\gamma_1$	$-\gamma_1 < C_2 < +\gamma_1$	$C_2 = +\gamma_1$	$C_2 > +\gamma_1$
s_{21}	> 0	$= 0$	< 0	< 0	< 0
s_{22}	> 0	> 0	> 0	$= 0$	< 0

Wir bezeichnen das Integral $\int_0^{s_{11}} e^{\mp i \frac{\pi}{2} \delta^2} d\delta$ durch den Vektor a_{11} mit dem absoluten Betrage a_{11} , dessen Richtung durch den Winkel φ_{11} bestimmt wird, den $\overrightarrow{OQ_{11}}$ mit der positiven reellen Achse bildet. Dann ist also

$$\int_0^{s_{11}} e^{\mp i \frac{\pi}{2} \delta^2} d\delta = a_{11} = a_{11} \cdot e^{i \varphi_{11}},$$

wobei $-\pi < \varphi_{11} < +\pi$. Analog gilt:

$$\int_0^{s_{12}} e^{\mp i \frac{\pi}{2} \delta^2} d\delta = a_{12} = a_{12} \cdot e^{i \varphi_{12}},$$

so daß

$$\int_{s_{11}}^{s_{12}} e^{\mp i \frac{\pi}{2} \delta^2} d\delta = a_{12} - a_{11} = a_1 = a_1 \cdot e^{i \varphi_1}$$

ist, worin $a_1 = \overrightarrow{Q_{11}Q_{12}}$; $a_1 = |\overrightarrow{Q_{11}Q_{12}}| = \overline{Q_{11}Q_{12}}$ und φ_1 der Winkel, den der Vektor a_1 mit der positiven reellen Achse einschließt. Analog ist:

$$\int_{s_{21}}^{s_{22}} e^{\mp i \frac{\pi}{2} \epsilon^2} d\epsilon = a_2 \cdot e^{i \varphi_2}.$$

Steht im Exponenten des Integranden das —Zeichen, ist also $x_p + \varphi_x > 0$, so ist der Winkel $\varphi_x < 0$ und umgekehrt.

Wir setzen noch die Bogenlänge der Cornuschen Spirale

von Q_{11} nach Q_{12} gleich s_2 , von Q_{21} nach Q_{22} gleich s_2 , so daß $s_{12} - s_{11} = s_1$ und $s_{22} - s_{21} = s_2$ ist. Dann wird, wenn wir statt i die Exponentialgröße $e^{i\frac{\pi}{2}}$ schreiben:

$$(3) \quad u_P = \frac{2k}{\pi} \cdot \beta_1 \cdot \gamma_1 \cdot \frac{a_1}{s_1} \cdot \frac{a_2}{s_2} \cdot e^{i\left(\frac{\pi}{2} + \varphi_1 + \varphi_2\right)} \\ \cdot e^{ik\left[z_P + \frac{1}{2} \frac{y_P^2}{s_P + c_1} + \frac{1}{2} \frac{z_P^2}{s_P + c_1}\right]},$$

$$(3^*) \quad u_P = \frac{2k}{\pi} \cdot \beta_1 \cdot \gamma_1 \cdot \frac{a_1}{s_1} \cdot \frac{a_2}{s_2} \cdot e^{i\left(\frac{\pi}{2} + \varphi_1 + \varphi_2\right)} \\ \cdot e^{ik\left[z_P + \frac{1}{2} c_1 \cdot y_P + \frac{1}{2} c_1 \cdot z_P\right]}.$$

Die Intensität setzen wir nach § 9 dem Quadrat der Amplitude proportional. Die Amplitude der Lichtbewegung wird — abgesehen von dem Faktor $\frac{2k}{\pi} \cdot \beta_1 \cdot \gamma_1$ — dargestellt durch das Produkt der beiden Quotienten $\frac{\overline{Q_{11}} \overline{Q_{12}}}{\overline{Q_{11}} \overline{Q_{12}}}$ und $\frac{\overline{Q_{21}} \overline{Q_{22}}}{\overline{Q_{21}} \overline{Q_{22}}}$, während die anomale Phasenänderung durch die Winkelsumme $\left(\frac{\pi}{2} + \varphi_1 + \varphi_2\right)$ ausgedrückt wird, da sich der zweite Phasenfaktor $e^{ik\left[z_P + \frac{1}{2} c_1 \cdot y_P + \frac{1}{2} c_1 \cdot z_P\right]}$ bei dem Fortschreiten längs eines Lichtstrahles normal ändert. Betrachten wir nämlich zwei Aufpunkte P und P_1 auf dem gleichen Lichtstrahl, und sei der Abstand dieser beiden Punkte gleich d , so wird

$$x_{P_1} = x_P + d \cdot \alpha,$$

$$y_{P_1} = y_P + d \cdot \beta,$$

$$z_{P_1} = z_P + d \cdot \gamma$$

und demnach

$$e^{ik\left[z_{P_1} + \frac{1}{2} c_1 \cdot y_{P_1} + \frac{1}{2} c_1 \cdot z_{P_1}\right]} = e^{ik\left[z_P + \frac{1}{2} c_1 \cdot y_P + \frac{1}{2} c_1 \cdot z_P\right]} \\ \cdot e^{ikd \cdot \left[\alpha + \frac{1}{2} c_1 \cdot \beta + \frac{1}{2} c_1 \cdot \gamma\right]}.$$

Nun war

$$C_1 = \frac{\beta}{\alpha} \quad \text{und} \quad C_2 = \frac{\gamma}{\alpha},$$

so daß in gleicher Näherung wie oben

$$\alpha + \frac{1}{2} C_1 \cdot \beta + \frac{1}{2} C_2 \cdot \gamma = 1$$

wird. Die beiden von der Lage des Aufpunktes unmittelbar abhängenden Phasenfaktoren unterscheiden sich also bei den

Aufpunkten P und P_1 nur um e^{ikd} , entsprechend dem auf dem Lichtstrahle gemessenen Abstände der beiden Punkte.

Für Aufpunkte weit vor den beiden Brennnlinien¹⁾ liegen Q_{11} und Q_{21} im Windungspunkte S_2 der Cornuschen Spirale, Q_{12} und Q_{22} im Windungspunkte S_4 (der Index bei S deutet den Quadranten an), so daß $\varphi_1 = \varphi_2 = -\frac{\pi}{4}$, also $\frac{\pi}{2} + \varphi_1 + \varphi_2 = 0$. Für Aufpunkte weit hinter beiden Brennnlinien fallen Q_{11} und Q_{21} mit dem Windungspunkte S_3 , Q_{12} und Q_{22} mit dem Windungspunkte S_1 zusammen, so daß jetzt $\varphi_1 = \varphi_2 = +\frac{\pi}{4}$, also $\frac{\pi}{2} + \varphi_1 + \varphi_2 = \pi$. Dies zeigt, daß der Durchgang durch beide Brennflächen den Phasensprung π verursacht. Entsprechend erkennt man, daß — falls beide Brennflächen hinreichend weit entfernt sind — der Durchgang durch jede von ihnen den Phasensprung $\pi/2$ bewirkt.²⁾

Einer besonderen Erörterung bedarf der Fall, daß $x_P + \varrho_1 = 0$ bzw. $x_P + \varrho_2 = 0$ wird, daß es sich also um Aufpunkte handelt, die in der durch eine der beiden Brennnlinien gelegten achsen senkrechten Ebene liegen, da hier die Werte s_{11} und s_{12} bzw. s_{21} und s_{22} unbrauchbar werden. Man erkennt aber leicht, daß sich in diesem Falle ergibt:

$$(4) \quad u_P = \frac{2k}{\pi} \cdot \beta_1 \cdot \gamma_1 \cdot \frac{\sin(k y_P \beta_1)}{k y_P \beta_1} \cdot \frac{a_2}{s_2} \cdot e^{i\left(\frac{\pi}{2} + \varphi_1\right)} \cdot e^{ik\left[x_P + \frac{1}{2} \cdot \frac{z_P^2}{x_P + \varrho_1}\right]}$$

bzw.

$$(5) \quad v_P = \frac{2k}{\pi} \cdot \beta_1 \cdot \gamma_1 \cdot \frac{a_1}{s_1} \cdot \frac{\sin(k x_P \gamma_1)}{k x_P \gamma_1} \cdot e^{i\left(\frac{\pi}{2} + \varphi_1\right)} \cdot e^{ik\left[x_P + \frac{1}{2} \cdot \frac{y_P^2}{x_P + \varrho_1}\right]}.$$

Für $y_P = 0$ (bzw. $z_P = 0$) gehen diese Gleichungen in die Gleichungen (3) oder (3*) über, wenn dort $y_P = 0$; $x_P + \varrho_1 = 0$ (bzw. $z_P = 0$; $x_P + \varrho_2 = 0$) gesetzt wird, da in diesem Falle

$\frac{\sin(k y_P \beta_1)}{k y_P \beta_1}$ (bzw. $\frac{\sin(k x_P \gamma_1)}{k x_P \gamma_1}$) und auch $\frac{a_1}{s_1}$ (bzw. $\frac{a_2}{s_2}$) gleich 1 wird.

Wir könnten noch einige theoretische Betrachtungen über die Intensität bzw. deren örtliche Änderung in der Nähe der

1) Wegen der geringen Öffnung des Strahlenbündels, die wir bei der Annäherung vorausgesetzt haben, ist es unwesentlich, ob wir von „Brennlinie“ oder von „Brennfläche“ sprechen.

2) Vgl. die Betrachtungen des folgenden Paragraphen.

Brennlinien folgen lassen. Man erkennt z. B. durch Überlegungen, betreffend die Lage der Punkte Q_{n1} in Abhängigkeit von dem Wert der oben definierten Größen C_n , leicht, daß in der Nähe der Brennlinien Maxima und Minima der Intensität auftreten. Ferner lassen sich auch gewisse Aussagen über die Größe bzw. die Abnahme der Intensität in Punkten *außerhalb* des geometrisch-optischen Strahlenbündels machen, so u. a., daß *dort* die Intensitätsabnahme bei der speziellen Wahl der Begrenzung des Strahlenbündels, die wir oben angenommen haben, und die durch $-\beta_1 \leq \beta \leq +\beta_1$; $-\gamma_1 \leq \gamma \leq +\gamma_1$ gekennzeichnet war, nicht in allen durch die Achse gehenden Ebenen gleich schnell erfolgt, daß vielmehr die Abnahme in der Ebene $y_P = z_P$ schneller vor sich geht als z. B. in der Ebene $y_P = 0$ (bzw. $z_P = 0$), in der die eine (bzw. die andere) Brenn-

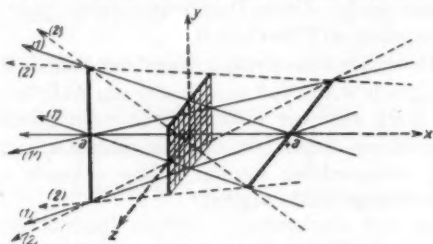


Fig. 10.

linie liegt.¹⁾ Denn verfolgen wir die Lage der Punkte Q_{n1} , so sehen wir, daß im letzten Falle nur eines der Punktepaare Q_{n1} , Q_{n2} im gleichen Quadranten liegt (vgl. die Zusammenstellung, die das Vorzeichen von s_{n1} , s_{n2} in Abhängigkeit von dem Werte der Größe C_n gibt), während dies im ersten Falle für beide Punktepaare gilt. Gerade dies aber ist der geometrische Ausdruck für die Abnahme der Intensität. Denn je mehr die beiden zusammengehörenden Punkte Q_{n1} , Q_{n2} sich dem gleichen Windungspunkte der Cornuschen Spirale nähern, um so geringer wird — von gewissen Schwankungen abgesehen — die zugehörige Verbindungsstrecke $\overline{Q_{n1}Q_{n2}}$, deren Quadrat ja — durch das Quadrat des Bogens $\widehat{Q_{n1}Q_{n2}}$ dividiert — in dem Intensitätsausdruck als Faktor auftritt. Wir wollen jedoch davon absehen, die Verhältnisse, die man zwar leicht übersieht,

1) Vgl. die Figg. 12a und 12b.

die sich aber mit allen Einzelheiten nur umständlich in Worten ausdrücken lassen, hier ausführlich zu erörtern. Wir wollen statt dessen einige graphische Darstellungen geben, die unter Benutzung der Cornuschen Spirale hergestellt sind, und die die Intensitätsverhältnisse leicht und anschaulich überblicken lassen.

Die Figg. 10—14 gelten alle für ein astigmatisches Strahlenbündel, wie es durch Gleichung (1) dargestellt ist, und bei dem der Abstand der beiden Brennnlinien 200λ beträgt. Die Öffnung ist durch $2\beta_1 = 2\gamma_1 = 0,2$ gegeben. Fig. 10 veranschaulicht die geometrisch-optischen Verhältnisse des betreffenden Strahlenbündels.¹⁾ Fig. 11 zeigt die Intensitätsverteilung längs seiner Achse. Man erkennt, daß bei dem gewählten Abstand der beiden Brennnlinien die Intensität in der Mitte zwischen ihnen, d. h. an der „Stelle engster Einschnürung“, größer ist, als an der Stelle, in der die Achse von den beiden Brennnlinien geschnitten wird.²⁾ Die Lage der

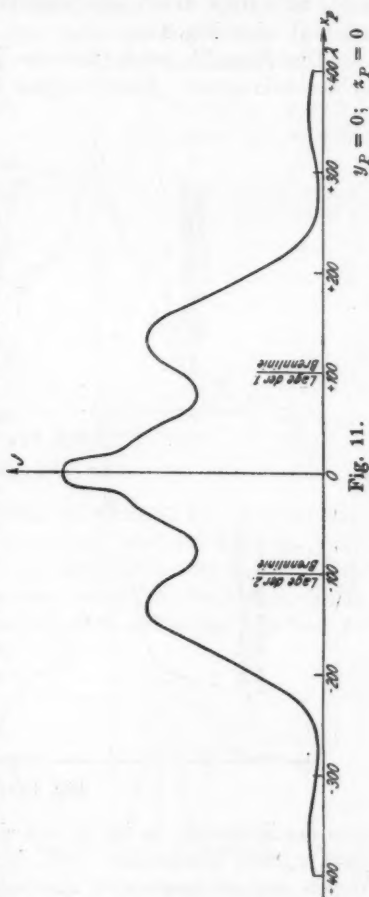


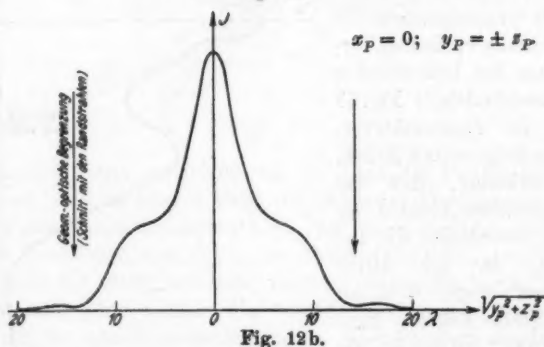
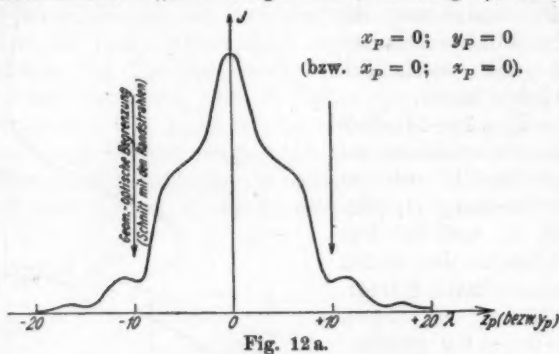
Fig. 11.

1) Durch die Strahlen (1), (1'), (2) der Figur sind die Randstrahlen des Bündels angedeutet. Die die x -Achse in den Punkten $+a$ und $-a$ senkrecht schneidenden Geraden entsprechen den Brennnlinien des Bündels. Der von diesem beleuchtete Teil der yz -Ebene ist durch Schraffierung gekennzeichnet.

2) Vgl. § 13.

beiden Brennlinsen ($x_P = \pm 100 \lambda$) ist in der Figur angedeutet. Wir sehen ferner, daß die Lage der Brennlinsen auf der Achse nicht unbedingt durch ein (relatives) Maximum ausgezeichnet ist (vgl. aber Fig. 13).

Die Figg. 12 geben uns die Intensitätsverteilung in der achsensenkrechten „Ebene engster Einschnürung“¹⁾, und zwar



a) in der Richtung, in der sie von der Brennlinienebene $y_P = 0$ (bzw. $z_P = 0$) geschnitten wird, b) in der Richtung $y_P = z_P$. Wegen der gewissermaßen quadratischen Fegrenzung unseres Strahlenbündels entspricht in dieser Richtung etwa der Wert $\sqrt{y_P^2 + z_P^2} = 14,14 \lambda$ der geometrisch-optischen Grenze, während diese in der Brennlinienebene etwa bei 10λ liegt. Man ersieht aus der Zeichnung den Unterschied der Intensitäts-

1) Auch „Ebene geringster Verwirrung“ genannt.

abnahme in den beiden Richtungen. Auf Grund dieser Figuren können wir uns leicht ein Bild von der Intensitätsverteilung in der ganzen betreffenden Ebene machen.

Die Figg. 13 lassen die Intensitätsverteilung in der Brennpunktlinie selbst sowie in der durch die Brennpunktlinie ge-

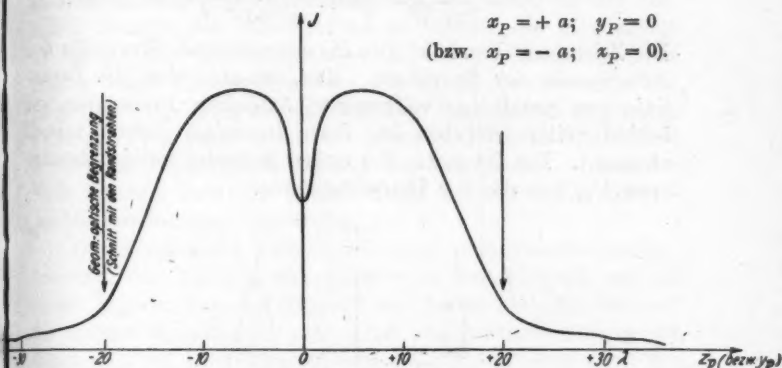
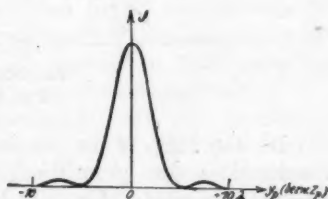


Fig. 13a.

legten achsensenkrechten Ebene erkennen. Die geometrisch-optische Begrenzung der Brennpunktlinie, die in unserem Falle etwa bei 20λ liegt, ist in der Zeichnung angedeutet. Auffällig ist hier, daß die Brennpunktlinie nicht in derjenigen Stelle ihr Maximum besitzt, wo sie von der Achse des Bündels geschnitten wird, sondern außerhalb der Achse. Dies ist jedoch nicht stets der Fall, sondern nur durch unsere speziellen Annahmen über die Größe der Öffnung und des Brennpunktlinienabstandes bedingt, wie man leicht erkennt. Würden diese Größen z. B. so gewählt sein, daß das Produkt aus β_1 (bzw. γ_1) und der Quadratwurzel aus dem in Wellenlängen gemessenen Brennpunktlinienabstand etwa gleich $1,2$ ($\approx \pi \cdot \sqrt{\frac{2}{3}}$) ist, so würde die Brennpunktlinie auf der Achse ein Intensitätsmaximum haben.



$$x_P = +a; x_P = 0$$

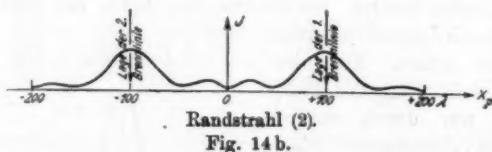
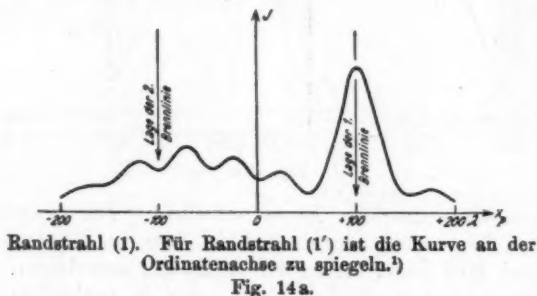
(bzw. $x_P = -a; y_P = 0$).

Fig. 13b.

Die Abnahme der Intensität in der durch die Brennnlinie gelegten achsensenkrechten Ebene ergibt sich durch Multiplikation der Intensität in den einzelnen Punkten der Brennnlinie mit dem variablen Faktor

$$\frac{\sin^2(k y_P \beta_1)}{(k y_P \beta_1)^2} \quad \left(\text{bzw.} \quad \frac{\sin^2(k x_P \gamma_1)}{(k x_P \gamma_1)^2} \right).$$

Die Zeichnung (Fig. 13b) gibt die entsprechende Kurve für den *Achsenpunkt* der Brennnlinie. Man erkennt, daß die Brennnlinie von parallelen, vollkommen ähnlichen Brennnlinien auf beiden Seiten umgeben ist, deren Intensität jedoch schnell abnimmt. Die Intensität der ersten Nebennbrennnlinien beträgt etwa $1/20$ von der der Hauptbrennnlinie.



In den Figg. 14 ist die Intensitätsverteilung längs eines Randstrahles des geometrisch-optischen Strahlenbündels gezeichnet und zwar a) für einen Randstrahl, der in der xy -Ebene liegt. Dieser durchsetzt die der z -Achse parallele Brennnlinie in ihrem Schnittpunkte mit der Achse, die der y -Achse parallele Brennnlinie dagegen in demjenigen Punkte, der der geometrisch-optischen Begrenzung der Brennnlinie entspricht

1) Vgl. Fig. 10.

und in unserem Falle etwa bei 20λ (s. o.) liegt. b) Für einen Randstrahl, der durch die Beziehungen $\beta = \beta_1$; $\gamma = \gamma_1$ gekennzeichnet ist, der also *beide* Brennnlinien im Abstände 20λ von der Achse durchsetzt. Als Abszisse ist jedoch in diesen Figuren nicht die auf dem Strahle gemessene Entfernung in Wellenlängen angenommen, sondern die Werte x_P der einzelnen Punkte des Strahles, um so leichter die Möglichkeit zu haben, die Lichtverhältnisse in einer achsensenkrechten Ebene unter Hinzuziehung der Fig. 11 zu betrachten. Die Lage der Brennnlinien ist eingezeichnet. Man erkennt im zweiten Falle die Symmetrie sowie die (absoluten) Intensitätsmaxima im Schnitt des Randstrahles mit den Brennnlinien. Im ersten Falle erkennt man die Auszeichnung der einen, im Achsenpunkte durchsetzten Brennnlinie.

Der Maßstab der Intensität ist in allen Figuren der gleiche, während der Maßstab der Abszisse in den Figg. 12 und 13 gleich $\frac{1}{10}$ von dem der Figg. 11 und 14 ist. Ist der Abstand der beiden Brennnlinien sehr groß, so erkennt man leicht durch analoge Überlegungen, daß die Lichtverhältnisse in der Nähe der Brennnlinien denen entsprechen, die Debye in der oben erwähnten Arbeit für eine Zylinderwelle angibt.

§ 12.

Wir wollen nun die im vorigen Paragraphen angestellten Betrachtungen unter Benutzung der Ergebnisse des § 8 dahin erweitern, daß wir ein beliebiges Strahlenbündel als gegeben annehmen, dessen Kaustik nur den in § 3 angegebenen Bedingungen unterliegt. Wir werden dann bei beliebig großer Öffnung des Strahlenbündels im allgemeinen nicht mehr mit der Annäherung des vorigen Paragraphen auskommen.

Wir wollen gleich hier bemerken, daß wir die für die mathematische Behandlung eingeführte Kennfläche außerhalb des geometrisch-optischen Strahlenbündels beliebig fortgesetzt denken können, da ja die Integration nur über den im geometrisch-optischen Sinne belichteten Teil desselben auszuführen ist, die gedachte Fortsetzung also ohne Einfluß ist. Wir wollen die Fortsetzung jedoch aus leicht erkennbaren praktischen Gründen so vorgenommen denken, daß die Tangentenebene sowie beide Krümmungshalbmesser stetig bleiben, und daß — falls dies mit den beiden genannten Forderungen

verträglich ist — die Normalen der Fortsetzung keiner der Normalen der Kennfläche parallel laufen.

Nennen wir — um eine von Mascart¹⁾ gebrauchte Bezeichnung zu übernehmen — den Punkt, in dem ein durch den Aufpunkt P gehender Lichtstrahl die Kennfläche (Wellenfläche) unseres Strahlenbündels trifft, einen „Pol des Punktes P “, so können wir das in § 8 erhaltene Resultat so aussprechen: *Um einen ersten Überblick über die Lichtverhältnisse zu erhalten, die im Aufpunkte P herrschen, haben wir die Integration*

$$(1) \quad u_P = \frac{ik}{2\pi} \cdot \int e^{ik(x_P - \xi(v, w), \eta(v, w))} \cdot \psi(v, w) \cdot K(v, w) d\sigma$$

nur über die im Innern des geometrisch-optischen Strahlenbündels liegenden Pole des Punktes P auszuführen.

Wir führen den hier zu behandelnden allgemeineren Fall auf den spezielleren des vorigen Paragraphen zurück. Wir denken uns zu diesem Zwecke das Koordinatensystem (x, y, z) so gewählt, daß der Ursprungspunkt mit dem Pol des Punktes P zusammenfällt, über den, d. h. über dessen Umgebung, wir die Integration in (1) ausführen wollen. Die x -, y - und z -Achsen fallen mit dem durch den Aufpunkt gehenden Lichtstrahl bzw. mit den Tangenten der Hauptkrümmungslinien der Kennfläche im Pole des Punktes P zusammen. Während nun für den Grenzfall $k \rightarrow \infty$, d. h. für die geometrische Optik, nur die durch die Pole des Aufpunktes P gehenden Lichtstrahlen für die in P herrschende Intensität in Frage kommen, die Integration also gewissermaßen nur unmittelbar über die Pole auszuführen ist, kommt es bei *endlichem* k auf Form und Größe des im geometrisch-optischen Sinne belichteten Teiles der Kennfläche an, was man auch aus der Kurvengestalt des Integranden sofort erkennt. Da aber auch in diesem Falle nur die Umgebung des Poles für die Integration einen *wesentlichen* Beitrag liefert, so können wir uns bei der für die Integration notwendigen Darstellung der Fläche in der Umgebung des Poles auf die quadratischen Glieder der Entwicklung beschränken. Wir erhalten dann:

$$\xi = \xi(v, w) = \left\{ -\frac{v^2}{2\varrho_1} - \frac{w^2}{2\varrho_2}; v; w \right\},$$

wo die Kurven $v = \text{const}$ und $w = \text{const}$ den Werten $y = \text{const}$ bzw. $z = \text{const}$ entsprechen. Die Werte ϱ_1 und ϱ_2 bedeuten

1) E. Mascart, *Traité d'Optique*, 1. S. 398. 1889.

wieder die Krümmungshalbmesser der Kennfläche im Pole des Punktes P . Der Punkt P selbst habe die Koordinaten $(R_P, 0, 0)$. Außerdem wird:

$$\mathfrak{N}(v, w) = \left\{ \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{v}{\varrho_1}\right)^2 + \left(\frac{w}{\varrho_2}\right)^2}}; \frac{v}{\varrho_1 \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{v}{\varrho_1}\right)^2 + \left(\frac{w}{\varrho_2}\right)^2}}; \frac{w}{\varrho_2 \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{v}{\varrho_1}\right)^2 + \left(\frac{w}{\varrho_2}\right)^2}} \right\}.$$

Setzen wir noch

$$\frac{v}{\varrho_1 \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{v}{\varrho_1}\right)^2 + \left(\frac{w}{\varrho_2}\right)^2}} = \beta; \quad \frac{w}{\varrho_2 \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{v}{\varrho_1}\right)^2 + \left(\frac{w}{\varrho_2}\right)^2}} = \gamma;$$

$$\sqrt{1 - \beta^2 - \gamma^2} = \alpha,$$

so wird in der erwähnten Näherung:

$$\mathfrak{E}(v, w) = \mathfrak{E}(\beta, \gamma) = \{-\tfrac{1}{2}(\varrho_1 \beta^2 + \varrho_2 \gamma^2); \varrho_1 \beta; \varrho_2 \gamma\}^1)$$

$$\mathfrak{N}(v, w) = \mathfrak{N}(\beta, \gamma) = \{\alpha; \beta; \gamma\}; \quad \mathfrak{E}_P = \{R_P; 0; 0\}.$$

Setzen wir dies in (1) ein, so erhalten wir:

$$(2) \quad u_P^* = \frac{ik}{2\pi} \cdot \iint e^{ik \left[R_P \cdot \alpha - \frac{1}{2}(\varrho_1 \beta^2 + \varrho_2 \gamma^2) \right]} \frac{d\beta d\gamma}{\alpha},$$

wofür wir in erster Annäherung auch schreiben dürfen, wenn $\alpha = 1 - \frac{1}{2}(\beta^2 + \gamma^2)$ gesetzt wird:

$$(3) \quad u_P^* = \frac{ik}{2\pi} \cdot e^{ikR_P} \cdot \iint e^{-ik \left[\frac{1}{2}(R_P + \varrho_1) \beta^2 + \frac{1}{2}(R_P + \varrho_2) \gamma^2 \right]} d\beta d\gamma$$

zu integrieren etwa von β_1 bis β_2 bzw. von γ_1 bis γ_2 .²⁾ Für Pole im Innern des geometrisch-optischen Strahlenbündels ist $\text{sign } \beta_1 \neq \text{sign } \beta_2$ und $\text{sign } \gamma_1 \neq \text{sign } \gamma_2$, also etwa $\beta_1 < 0$; $\beta_2 > 0$; $\gamma_1 < 0$; $\gamma_2 > 0$. (Der Stern * bei u_P^* soll andeuten, daß es sich hier nur um den Anteil eines einzelnen der durch P gehenden „Lichtstrahlen“ an die in P herrschenden Lichtverhältnisse handelt. Um die gesamte in P vorhandene Lichtintensität zu erhalten, sind alle durch P hindurchgehenden Lichtstrahlen zu berücksichtigen).

1) Dies ergibt sich auch sofort durch geometrische Überlegungen. Vgl. auch § 10, Gleichung (1).

2) Daß die Integrationsgrenzen $\beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2$ im allgemeinen durch gewisse Gleichungen gegeben sein werden, möge hier unberücksichtigt bleiben.

Hier können wir die Integration nach β und γ getrennt vollziehen. Wir setzen noch

$$\frac{k}{\pi} \cdot |R_P + \varrho_1| \cdot \beta^2 = \delta^2 \quad \text{und} \quad \frac{k}{\pi} \cdot |R_P + \varrho_2| \cdot \gamma^2 = \varepsilon^2$$

und

$$\begin{aligned} \beta_1 \cdot \sqrt{\frac{k}{\pi} \cdot |R_P + \varrho_1|} &= s_{11}; & \gamma_1 \cdot \sqrt{\frac{k}{\pi} \cdot |R_P + \varrho_2|} &= s_{21}; \\ \beta_2 \cdot \sqrt{\frac{k}{\pi} \cdot |R_P + \varrho_1|} &= s_{12}; & \gamma_2 \cdot \sqrt{\frac{k}{\pi} \cdot |R_P + \varrho_2|} &= s_{22}. \end{aligned}$$

Wir erhalten so:

$$(4) \left\{ \begin{aligned} u_P^* &= \frac{ik}{2\pi} \cdot e^{ikR_P} \cdot (\beta_2 - \beta_1) \cdot (\gamma_2 - \gamma_1) \cdot \frac{1}{s_{12} - s_{11}} \cdot \int_{s_{11}}^{s_{12}} e^{\mp i \frac{\pi}{2} \delta^2} d\delta \\ &\quad \cdot \frac{1}{s_{22} - s_{21}} \cdot \int_{s_{21}}^{s_{22}} e^{\mp i \frac{\pi}{2} \varepsilon^2} d\varepsilon \end{aligned} \right.$$

wo im Exponenten des Integranden das $-$ -Zeichen gilt, wenn $R_P + \varrho_\kappa > 0$ und das $+$ -Zeichen, wenn $R_P + \varrho_\kappa < 0$ ($\kappa = 1, 2$) ist.¹⁾

Die Gleichung (4) stimmt im wesentlichen überein mit Gleichung (2*) des § 11 und gestattet demgemäß eine ganz entsprechende Diskussion, die hier nicht nochmals durchgeführt zu werden braucht. Wir übernehmen vielmehr die dort erhaltenen Ergebnisse und schreiben zunächst statt (4) in Analogie zu (3) des § 11

$$(5) \left\{ u_P^* = \frac{k}{2\pi} \cdot e^{ikR_P} \cdot (\beta_2 - \beta_1) \cdot (\gamma_2 - \gamma_1) \cdot \frac{a_1}{s_1} \cdot \frac{a_2}{s_2} \cdot e^{i \left(\frac{\pi}{2} + \varphi_1 + \varphi_2 \right)} \right.$$

wo $a_1, s_1, a_2, s_2, \varphi_1, \varphi_2$ dieselbe Bedeutung wie in § 11 haben.

Nehmen wir nun vorerst an, daß durch den betrachteten Aufpunkt nur ein Lichtstrahl des Strahlenbündels hindurchgeht — dies wird für sehr weit von den Brennflächen entfernte Aufpunkte im allgemeinen zutreffen —, so können wir aus (5) sofort die Intensität — diese gleich dem Quadrat der Amplitude gesetzt — ablesen, die im Aufpunkte herrscht. Wir er-

1) Der Wert $R_P + \varrho_\kappa$ gibt die Entfernung des Punktes P von dem Punkte, in dem der durch P gehende Lichtstrahl die κ te Schale der Kaustik trifft, da einer dem einfallenden Lichte die konvexe Seite zukehrenden Kennfläche ein Wert $\varrho_\kappa > 0$ zugeordnet war.

halten nämlich, abgesehen von dem Faktor $k^2/4\pi^2$, für die Intensität im Punkt P :

$$J_P = \left(\frac{a_1}{s_1}\right)^2 \cdot \left(\frac{a_2}{s_2}\right)^2 \cdot (\beta_2 - \beta_1)^2 \cdot (\gamma_2 - \gamma_1)^2.$$

Betrachten wir Aufpunkte, die auf demselben „Lichtstrahle“ liegen, so ist für diese $(\beta_2 - \beta_1)$ und $(\gamma_2 - \gamma_1)$ konstant. Für solche Punkte ist also die Intensität proportional dem Quadrat des Produktes der beiden Quotienten $\frac{a_1}{s_1}$ und $\frac{a_2}{s_2}$ aus der gradlinigen Entfernung $\overline{Q_{11}Q_{12}}$ (bzw. $\overline{Q_{21}Q_{22}}$) und der Bogenlänge $\widehat{Q_{11}Q_{12}}$ (bzw. $\widehat{Q_{21}Q_{22}}$) der Cornuschen Spirale. Betrachten wir dagegen Punkte, die auf verschiedenen „Lichtstrahlen“ liegen, so werden im allgemeinen die Größen $(\beta_2 - \beta_1)$ und $(\gamma_2 - \gamma_1)$ nicht völlig konstant sein, wie man leicht aus den früheren Betrachtungen erkennt. Rückt der Punkt P auf dem Lichtstrahle weiter, so sind dadurch — wie man geometrisch leicht einsieht — *Schwankungen der Intensität* bedingt, die *in der Nähe der Kaustik am schärfsten ausgeprägt* sind.¹⁾

Der Ausdruck (5) gibt uns auch die sogenannte „anomale Phasenänderung“, die das Licht — abweichend von den geometrisch-optischen Annahmen — auf seinem Wege erleidet. Wir können diese anomale Phasenänderung wieder gleich $\frac{\pi}{2} + \varphi_1 + \varphi_2$ setzen, indem wir die Phase, die in einem vor den Brennflächen liegenden, unendlich entfernten Aufpunkte herrscht, als die normale ansprechen, auf die wir die übrigen beziehen. Für Aufpunkte, die sehr weit vor den Brennflächen liegen, für die also

$$R_P + \varrho_1 > 0; \quad R_P + \varrho_2 > 0; \quad |s_{s1}| \gg 1$$

ist, erhalten wir so in Übereinstimmung mit unserem ursprünglichen Ansatz den Phasenfaktor e^{ikR_P} . Sind die beiden Brennflächen sehr weit voneinander entfernt, so daß es Aufpunkte gibt, für die die Bedingungen gelten

$$R_P + \varrho_1 < 0; \quad R_P + \varrho_2 > 0; \quad |s_{s1}| \gg 1,^2)$$

1) Vgl. §§ 11 und 13.

2) Diese Bedingungen wird man bereits als erfüllt annehmen dürfen, wenn beide Brennflächen etwa 10000 Wellenlängen, d. h. etwa 5 mm, voneinander entfernt sind.

so ergibt sich hierfür als Phasenfaktor der Wert

$$e^{i(kR_P + \frac{\pi}{2})}, \text{ da jetzt } \varphi_1 = +\frac{\pi}{4} \text{ und } \varphi_2 = -\frac{\pi}{4}$$

wird. Wir erhalten also für zwei Aufpunkte, zwischen denen eine der beiden Brennflächen liegt, unter der Voraussetzung, daß beide Aufpunkte von *beiden* Brennflächen weit genug entfernt sind, als *anomale Phasenänderung den Wert* $\frac{\pi}{2}$, wie er sich bei der Betrachtung von Zylinderwellen ergibt.

Rückt der Aufpunkt über die zweite Brennfläche hinweg, so ergibt sich, wenn er von dieser sehr weit entfernt ist, wenn also

$$R_P + \varrho_1 < 0; \quad R_P + \varrho_2 < 0; \quad |s_{\text{rel}}| \gg 1$$

ist, als Phasenfaktor der Wert

$$e^{i(kR_P + \pi)}, \text{ da jetzt } \varphi_1 = \varphi_2 = +\frac{\pi}{4}$$

ist. *Hat der Lichtstrahl also beide Brennflächen passiert, so entspricht dem eine anomale Phasenänderung von der Größe* π , wie es auch für Kugelwellen gilt, bei denen beide Brennflächen in einen gemeinsamen Punkt, den Brennpunkt, ausarten.

Wir hatten bereits in § 3 gesehen, daß

$$(6) \quad u_P = \frac{ik}{2\pi} \cdot \int e^{ik(x_P - \xi(v, w), \Re(v, w))} d\Omega$$

der Schwingungsgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$ genügt. Die hier durchgeführten Betrachtungen zeigen nun auch, daß (6) den Grenzbedingungen genügt. Wir sahen nämlich, daß im Gebiete des geometrisch-optischen Schattens u_P den Forderungen entsprechend den Wert Null annimmt (s. u.), daß dagegen für Aufpunkte, die im geometrisch-optischen Strahlenbündel sehr weit vor den Brennflächen liegen, sich aus (5) der Wert $u_P = \frac{e^{ikR_P}}{R_P}$ ergibt (—gleichfalls den gestellten Forderungen entsprechend —), da ja dort ϱ_1 und ϱ_2 gegen R_P im Produkt $s_1 s_2$ zu vernachlässigen sind, also

$$\frac{a_1}{s_1} \cdot \frac{a_2}{s_2} = \frac{2\pi}{k \cdot (\beta_2 - \beta_1)(\gamma_2 - \gamma_1) \cdot R_P}$$

wird.

Vernachlässigen wir ϱ_1 und ϱ_2 nicht, so erhalten wir aus (5):

$$u_P = \frac{e^{ikR_P}}{\sqrt{|R_P + \varrho_1| \cdot |R_P + \varrho_2|}}.$$

Hierdurch ist der in § 8 noch fehlende geometrisch-optische Wert von u_p nachgeliefert.¹⁾ Für Aufpunkte zwischen beiden Brennflächen (und von diesen hinreichend weit entfernt) tritt

noch der Faktor $e^{i\frac{\pi}{2}}$, für Aufpunkte weit hinter beiden Brennflächen der Faktor $e^{i\pi}$ hinzu.

Wir wollen den Gültigkeitsbereich vorstehender Überlegungen untersuchen. Rückt der Aufpunkt in die Nähe der geometrisch-optischen Begrenzung, d. h. in die Nähe der Randstrahlen, so wird die „Umgebung des Poles“, die gewissermaßen den „Lichtstrahl“ bildet, für Aufpunkte im Innern des Strahlenbündels nicht mehr vollständig dem Integrationsgebiet angehören, für Aufpunkte außerhalb des Strahlenbündels aber zum Teil noch in das Integrationsgebiet hineinragen. In der Nähe des Randes werden daher — abweichend von der geometrischen Optik — „Beugungserscheinungen“ auftreten.

§ 13.

Für weit entfernte Aufpunkte im Innern des Strahlenbündels konnten wir annehmen, daß durch sie nur ein einziger Lichtstrahl hindurchgeht. Diese Annahme ist für Aufpunkte in der Nähe der Kaustik nicht mehr möglich. In den Figg. 15 und 16 haben wir²⁾ für das „sphärisch unkorrigierte“ und das „sphärisch korrigierte“ achsensymmetrische Strahlenbündel einzelne Gebiete abgegrenzt und durch die Zahlen 0, I, II . . bezeichnet. Diese Zahlen geben an, wieviel Lichtstrahlen des betreffenden Strahlenbündels durch einen Punkt des entsprechenden Gebietes hindurchgehen.³⁾ ⁴⁾ Für Strahlenbündel, die in zwei getrennten Brennflächen konvergieren, liegen die

1) Scheinbar widerspricht dieser Aussage der Wert, den Debye im Fall der Kugelwelle von kreiszylindrischer Öffnung für Achsenpunkte ableitet. Es ist aber zu bedenken, daß dann der oben ausgeschlossene Fall vorliegt, in welchem die Begrenzung des Integrationsbereiches der Gleichung $\zeta = \text{const}$ genügt.

2) Vgl. J. Fischer, a. a. O. S. 371.

3) Durch die Punkte desjenigen Teiles der Achse, der mit der ausgearteten Kaustik zusammenfällt, gehen (— der Achsensymmetrie wegen —) $(2 \cdot \infty + 1)$ geom. opt. Lichtstrahlen bzw. $(4 \cdot \infty + 1)$.

4) Die Figuren bestätigen die Annahme, daß durch weit entfernte Aufpunkte des Strahlenbündels im allgemeinen nur ein einziger Lichtstrahl hindurchgeht (vgl. jedoch die Verhältnisse beim Regenbogenproblem).

Verhältnisse ähnlich, jedoch im allgemeinen komplizierter. Etwas einfacher dagegen werden die Verhältnisse, wenn wir uns auf wenig geöffnete Strahlenbündel beschränken, die — wie das in § 1 behandelte — in zwei getrennten Brennlinien konvergieren. Dort geht auch in der Nähe dieser Brennlinien durch jeden Punkt des Strahlenbündels nur ein einziger Lichtstrahl hindurch.

Wir betrachten nun den Anteil, den ein einziger „Lichtstrahl“ an den im Aufpunkte P herrschenden Lichtverhältnissen hat, wobei P nach unserer Annahme auf dem Licht-

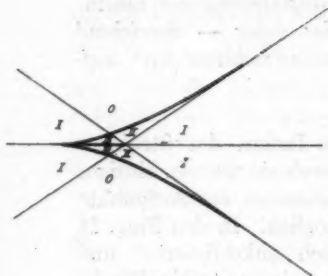


Fig. 15.

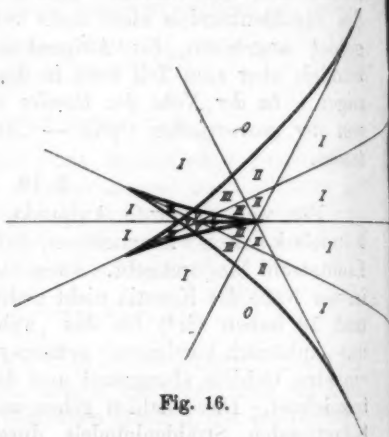


Fig. 16.

strahl liegt, und zwar jetzt in der Nähe der Kaustik. Wir haben hier noch zwischen den beiden Fällen zu unterscheiden, daß der Abstand der beiden Brennflächen (bzw. Brennlinien) sehr groß oder sehr klein ist. Wir nehmen ihn zunächst als sehr groß an. Liegt dann der Punkt P noch in großer Entfernung vor den beiden Brennflächen, so liegen die in § 12 dem Aufpunkte P zugeordneten Punkte Q_{11} und Q_{21} der Cornuschen Spirale — wie wir oben sahen — in der Nähe des Windungspunktes S_2 , die Punkte Q_{12} und Q_{22} in der Nähe von S_4 . Rückt nun Punkt P der ersten Brennfläche näher, so wandern die Punkte Q_{11} und Q_{12} auf dem zugehörigen Zweige der Spirale zur Spitze, d. h. zum Punkte $(0,0)$ der komplexen Ebene hin, während Q_{21} und Q_{22} wegen der sehr großen Entfernung der beiden Brennflächen in der Nähe der Windungs-

punkte S_2 bzw. S_4 bleiben. Dies ist auch noch der Fall, wenn P die erste Brennofläche überschritten hat und demnach Q_{11} aus dem zweiten in den dritten Quadranten, Q_{12} aus dem vierten in den ersten hineingewandert ist. Wir nehmen nun den Abstand der beiden Brennoflächen als so groß an, daß sich Q_{21} noch in der Nähe von S_2 , Q_{22} in der Nähe von S_4 befindet, wenn bereits Q_{11} in die Nähe von S_3 , Q_{12} in die Nähe von S_1 gelangt ist. Beim Durchgang durch die erste Brennofläche ergeben sich demnach unter der Annahme sehr großer Entfernung beider Brennoflächen für einen einzelnen „Lichtstrahl“ nahezu die gleichen Verhältnisse wie bei der ebenen Kreis- zylinderwelle.¹⁾ Das gleiche gilt dann auch beim Durchgang durch die zweite Brennofläche. *Die Lage der beiden sehr weit voneinander entfernten Brennoflächen ist also — wenn ein einzelner „Lichtstrahl“ betrachtet wird — durch besonders hohe Maxima der Intensität ausgezeichnet. In der Nachbarschaft beider Brennoflächen nimmt die Intensität nach beiden Richtungen in Schwankungen schnell ab.*

Liegen die beiden Brennoflächen jedoch nicht sehr weit auseinander, so rücken Q_{11} und Q_{21} einerseits, Q_{12} und Q_{22} andererseits in geringem Abstände hintereinander durch die Spitze der Cornuschen Spirale vom zweiten in den dritten bzw. vom vierten in den ersten Quadranten. *Die beiden Brennoflächen verlieren dann ihre Selbständigkeit, d. h. zwischen ihnen nimmt die Lichtintensität nicht — wie oben — in Schwankungen stark ab, sondern ist etwa von derselben Größe wie die der Brennoflächen selbst bzw. übertrifft sie sogar noch.²⁾*

Bei den vorstehenden Überlegungen war nur der Anteil eines einzigen der durch den Aufpunkt P gehenden „Lichtstrahlen“ berücksichtigt. Wir bemerkten schon oben, daß im allgemeinen durch einen Punkt in der Nähe der Kaustik mehrere „Strahlen“ gehen. Diese werden im Aufpunkte verschiedene Amplituden und verschiedene Phasen haben und durch Interferenz die dort vorhandene Gesamtintensität ergeben.

Für Aufpunkte des geometrisch-optischen Strahlenbündels, die in nächster Nähe der Brennoflächen liegen, gilt die einfache Superposition der „Lichtstrahlen“ nicht mehr, da sich für

1) Vgl. P. Debye, a. a. O. S. 769.

2) Vgl. die graphischen Darstellungen des § 11.

solche Aufpunkte die — den wesentlichsten Beitrag liefernden — „Polumgebungen“ der geometrisch-optischen Lichtstrahlen zum Teil überdecken, zum Teil auch nicht mehr vollständig dem Integrationsgebiete angehören. Es ergeben sich also hier gewisse Modifikationen.

Betrachten wir noch solche Aufpunkte, die jenseits der Kaustik liegen und durch die kein Lichtstrahl des geometrisch-optischen Strahlenbündels hindurchgeht, wie dies z. B. für alle in den Gebieten 0 der Figg. 15 und 16 liegenden Aufpunkte der Fall ist. Für diese wird jedoch — solange sie der Kaustik *sehr* nahe liegen — die „Polumgebung“ der zugehörigen gedachten Lichtstrahlen¹⁾ noch zum Teil dem Integrationsgebiet angehören. Nur diese Teile liefern einen Beitrag zur Integration, so daß die Fresnelschen Integrale — oder wenigstens das eine von ihnen — nur zwischen zwei Werten

$$s_{11} = \beta_1 \cdot \sqrt{\frac{k}{\pi} \cdot |R_P + \varrho_1|} \quad \text{und} \quad s_{12} = \beta_2 \sqrt{\frac{k}{\pi} \cdot |R_P + \varrho_1|}$$

(bzw. s_{21} und s_{22}) auszuführen sind, die das *gleiche* (etwa positive) Vorzeichen haben. Rückt der Aufpunkt weiter von der Kaustik fort, und zwar so, daß z. B. $R_P + \varrho_1$ sich dabei nicht ändert, so werden die Integrationsgrenzen $s_{11} + \sigma$; $s_{12} + \sigma$ ($\sigma > 0$), woraus wegen der mit wachsender Bogenlänge zunehmenden Krümmung der Cornuschen Spirale eine Abnahme der Intensität folgt (vgl. die analogen Betrachtungen in § 11).

§ 14.

In § 7 (Gleichung 4) haben wir die Integraldarstellung für ein achsensymmetrisches Strahlenbündel gegeben, dessen Wellenflächen den Gleichungen

$$(1) \quad \begin{cases} x = \frac{1}{8} b \cdot \cos \vartheta \cdot (3 \sin^4 \vartheta + \text{const}) \\ y = \frac{1}{8} b \cdot \sin \vartheta \cdot \cos \varphi \cdot (-4 \sin^2 \vartheta + 3 \sin^4 \vartheta + \text{const}) \\ z = \frac{1}{8} b \cdot \sin \vartheta \cdot \sin \varphi \cdot (-4 \sin^2 \vartheta + 3 \sin^4 \vartheta + \text{const}) \end{cases}$$

1) Wir sagten bereits, daß wir uns die Kennfläche beliebig fortgesetzt denken können, und zwar so, daß die Tangentenebene und beide Krümmungshalbmesser an der Fortsetzungsstelle stetig bleiben.

und dessen Brennflächen den Gleichungen

$$(2) \left\{ \begin{aligned} x_1 &= \frac{3}{2} b \sin^2 \vartheta \cos^3 \vartheta \\ y_1 &= \frac{b}{2} \sin^3 \vartheta \cos \varphi \cdot (2 - 3 \sin^2 \vartheta) \\ z_1 &= \frac{b}{2} \sin^3 \vartheta \sin \varphi \cdot (2 - 3 \sin^2 \vartheta) \end{aligned} \right\} \text{ bzw. } \left\{ \begin{aligned} x_2 &= \frac{b}{2} \sin^2 \vartheta \cos \vartheta \\ y_2 &= 0 \\ z_2 &= 0 \end{aligned} \right.$$

genügen. Wir sahen, daß das Strahlenbündel in erster Näherung übereinstimmt mit demjenigen, dessen Brennflächen die Evolutenschalen eines Rotationsparaboloids sind. Die betreffende Integraldarstellung selbst lautete

$$(3) \left\{ u_P = \frac{ik}{2\pi} \cdot \int_0^{\Theta} \int_0^{2\pi} e^{ik \left[x_P \cos \vartheta + y_P \sin \vartheta \cos \varphi + z_P \sin \vartheta \sin \varphi + \frac{1}{8} b \sin^4 \vartheta \right]} \cdot \sin \vartheta d\vartheta d\varphi \right.$$

$$(3^*) \left\{ u_P = ik \cdot \int_0^{\Theta} J_0(k \varrho_P \sin \vartheta) \cdot e^{ik \left[x_P \cos \vartheta + \frac{1}{8} b \sin^4 \vartheta \right]} \sin \vartheta d\vartheta \right.$$

$$\varrho_P = \sqrt{y_P^2 + z_P^2}.$$

Nun war

$$\cos \vartheta = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 \vartheta - \frac{1}{8} \sin^4 \vartheta - \frac{1}{16} \sin^6 \vartheta - \frac{5}{128} \sin^8 \vartheta - \dots,$$

so daß wir statt (3*) zunächst schreiben können

$$(4) \left\{ u_P = ik e^{ik x_P} \cdot \int_0^{\Theta} J_0(k \varrho_P \sin \vartheta) \cdot e^{ik \left[\frac{1}{8} (b - x_P) \sin^4 \vartheta - \frac{1}{2} x_P \sin^2 \vartheta \right]} \cdot e^{-ik x_P \left(\frac{1}{16} \sin^6 \vartheta + \dots \right)} \sin \vartheta d\vartheta \right.$$

Wir wollen nun in Hinsicht auf die Öffnung unseres Strahlenbündels sowie auf die x -Koordinate des Aufpunktes die Voraussetzung machen, daß im ganzen Integrationsgebiet

$$(5) \quad \left| \frac{k}{16} x_P \sin^6 \vartheta \right| \ll 1$$

ist. Das ist z. B. noch der Fall, wenn wir als Öffnung des Strahlenbündels $2\Theta = 35^\circ$ und $-100 \lambda \leq x_P \leq +100 \lambda$ ($\lambda =$ Wellenlänge des Lichtes, als Maßeinheit gewählt) annehmen. Für $x_P = \pm 100 \lambda$ und $2\Theta = 35^\circ$ wird

$$\frac{1}{16} k x_P \sin^6 \Theta = +0,000286 x_P = \pm 0,0286.$$

Ist die vorausgesetzte Bedingung (5) erfüllt, so kann der im Integranden von (4) auftretende Faktor

$$e^{-ikx_P \left(\frac{1}{16} \sin^2 \vartheta + \dots \right)}$$

gleich 1 gesetzt werden, und wir erhalten dann:

$$u_P = ik e^{ikx_P} \cdot \int_0^\vartheta J_0(k \varrho_P \sin \vartheta) \cdot e^{ik \left[\frac{1}{8} (b-x_P) \sin^2 \vartheta - \frac{1}{2} x_P \sin^2 \vartheta \right]} \cdot \sin \vartheta d\vartheta.$$

Wir setzen $\sin \vartheta = \xi$. Dann wird:

$$d\vartheta = \frac{1}{\cos \vartheta} d\xi = \left(1 + \frac{1}{2} \xi^2 + \frac{3}{8} \xi^4 + \dots \right) d\xi$$

und:

$$u_P = ik e^{ikx_P} \cdot \int_0^\Xi J_0(k \varrho_P \xi) \cdot e^{ik \left[\frac{1}{8} (b-x_P) \xi^2 - \frac{1}{2} x_P \xi^2 \right]} \cdot \left(1 + \frac{1}{2} \xi^2 + \frac{3}{8} \xi^4 \right) \xi d\xi,$$

wo

$$\Xi = \sin \Theta.$$

Wir wollen zunächst den Wert $x_P = b$ ausschließen, also $b - x_P \neq 0$ annehmen. Als neue Integrationsvariable führen

wir $\eta = \frac{1}{2} \xi^2 - \psi$ ein, wo $\psi = \frac{x_P}{b - x_P}$ ist. Dann wird

$$\xi = \sqrt{2(\eta + \psi)}, \quad \xi d\xi = d\eta$$

$$\frac{1}{8} (b - x_P) \xi^4 - \frac{1}{2} x_P \xi^2 = \frac{1}{2} (b - x_P) \eta^2 - \frac{1}{2} x_P \psi;$$

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{2} \xi^2 + \frac{3}{8} \xi^4 &= \left(1 + \psi + \frac{3}{2} \psi^2 \right) + (1 + 3\psi) \eta + \frac{3}{2} \eta^2 \\ &= E + F \cdot \eta + G \cdot \eta^2, \end{aligned}$$

wenn zur Abkürzung

$$1 + \psi + \frac{3}{2} \psi^2 = E; \quad 1 + 3\psi = F; \quad \frac{3}{2} = G$$

gesetzt wird. Besitzt das Strahlenbündel eine geringere Öffnung, so daß es genügt, bei der oben angegebenen Transformation $\sin \vartheta = \xi$ statt

$$d\vartheta = \left(1 + \frac{1}{2} \xi^2 + \frac{3}{8} \xi^4 \right) d\xi$$

zu setzen $d\vartheta = (1 + \frac{1}{2} \xi^2) d\xi$, so wird $E = 1 + \psi$; $F = 1$;

$G = 0$. Genügt es bereits, $d\vartheta = d\xi$ zu setzen¹⁾, so wird $E = 1$; $F = 0$; $G = 0$. Um diese verschiedenen Fälle gemeinsam behandeln zu können, behalten wir vorläufig die Bezeichnungen E, F, G bei und erhalten so für u_P die Gleichung:

$$u_P = i k e^{i k x_P \left(1 - \frac{1}{2} \psi\right)} \cdot \int_{H_1}^{H_2} (k \varrho_P \cdot \sqrt{2(\eta + \psi)}) \cdot e^{i k \cdot \frac{1}{2} (b - x_P) \eta^2} \cdot (E + F \cdot \eta + G \cdot \eta^2) d\eta,$$

wo

$$H_1 = -\psi,$$

$$H_2 = \frac{1}{2} \sin^2 \Theta - \psi.$$

Das Argument der Besselschen Funktion $J_0(k \varrho_P \sqrt{2(\eta + \psi)})$ können wir in die beiden Summanden

$$\alpha = -k \varrho_P \sqrt{2\psi} \quad \text{und} \quad \beta = +k \varrho_P [\sqrt{2(\eta + \psi)} + \sqrt{2\psi}]$$

zerlegen. Nun gilt die Beziehung

$$J_0(\alpha + \beta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta)^n}{n!} \cdot \left(1 + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^n \cdot J_n(\alpha),$$

so daß

$$\begin{aligned} J_0(k \varrho_P \sqrt{2(\eta + \psi)}) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{k \varrho_P \eta}{\sqrt{2\psi}}\right)^n \cdot \frac{1}{n!} \cdot J_n(-k \varrho_P \sqrt{2\psi}) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-k \varrho_P \eta}{\sqrt{2\psi}}\right)^n \cdot \frac{1}{n!} \cdot J_n(k \varrho_P \sqrt{2\psi}) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (+\eta)^n \cdot \left(\frac{-1}{2\psi}\right)^n \cdot \frac{1}{n!} \cdot \delta^n \cdot J_n(\delta), \end{aligned}$$

worin

$$\delta = k \varrho_P \sqrt{2\psi}.$$

Setzen wir noch vorübergehend zur Abkürzung

$$\frac{1}{2} k (b - x_P) = A \quad \text{und} \quad \left(-\frac{1}{2\psi}\right)^n \cdot \frac{1}{n!} \cdot \delta^n \cdot J_n(\delta) = H_n; \quad n \geq 0,$$

1) Dies können wir auch bei beliebiger Öffnung des Strahlenbündels tun, da es einem in (3) bzw. (3*) hinzutretenden Faktor $\cos \vartheta$ entspricht, was dahin gedeutet werden kann, daß auf der unendlichfernen Wellenfläche eine durch $\cos \vartheta$ bestimmte variable Intensität vorhanden ist.

also

$$J_0(k \varrho_P \sqrt{2(\eta + \psi)}) = \sum_{n=0}^{\infty} H_n \cdot \eta^n,$$

so wird

$$(6) \quad u_P = i k e^{i k x_P \left(1 - \frac{1}{2} \psi\right)} \cdot \int_{H_1}^{H_2} e^{i A \eta^2} \cdot (E + F \eta + G \eta^2) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} H_n \eta^n d\eta.$$

Bei gegebenem Aufpunkt ist $\sum_{n=0}^{\infty} H_n \cdot \eta^n$ im Intervall $H_1 \dots H_2$ gleichmäßig konvergent, so daß gliedweise Integration gestattet ist. Da außerdem wegen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{J_{n+1}(\delta)}{J_n(\delta)} \rightarrow \frac{\delta}{n+1}$$

die Summe $\sum_{n=0}^{\infty} H_n \eta^n$ auch absolut konvergent ist, so dürfen wir die Reihenfolge der Glieder ändern, und erhalten so für das in (6) auftretende Integral die folgenden sechs Integrale:

$$\begin{aligned} & E \cdot \sum_0^{\infty} H_{2n} \cdot \int_{H_1}^{H_2} e^{i A \eta^2} \eta^{2n} d\eta + F \cdot \sum_0^{\infty} H_{2n+1} \cdot \int_{H_1}^{H_2} e^{i A \eta^2} \eta^{2(n+1)} d\eta \\ & \quad + G \cdot \sum_0^{\infty} H_{2n} \cdot \int_{H_1}^{H_2} e^{i A \eta^2} \eta^{2(n+1)} d\eta \\ & + E \cdot \sum_0^{\infty} H_{2n+1} \cdot \int_{H_1}^{H_2} e^{i A \eta^2} \eta^{2n} \cdot \eta d\eta + F \cdot \sum_0^{\infty} H_{2n} \cdot \int_{H_1}^{H_2} e^{i A \eta^2} \eta^{2n} \cdot \eta d\eta \\ & \quad + G \cdot \sum_0^{\infty} H_{2n+1} \cdot \int_{H_1}^{H_2} e^{i A \eta^2} \eta^{2(n+1)} \cdot \eta d\eta. \end{aligned}$$

Man erkennt leicht durch sukzessive partielle Integration, daß

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} \int_{H_1}^{H_2} e^{i A \eta^2} \eta^{2n} d\eta &= \frac{n!!}{(-2iA)^n} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{2A}} \cdot [C_u + i \cdot S_u] \frac{H_2 \cdot \sqrt{\frac{2A}{\pi}}}{H_1 \cdot \sqrt{\frac{2A}{\pi}}} \\ &+ \frac{n!!}{(-2iA)^n} \cdot \left[\frac{e^{i A \eta^2}}{2iA\eta} \cdot f_n(-2iA\eta^2) \right]_{H_1}^{H_2}, \end{aligned} \right.$$

worin

$$C_u = C_u(s) = \int_0^s \cos \frac{\pi}{2} u^2 du \quad \text{und} \quad S_u = S_u(s) = \int_0^s \sin \frac{\pi}{2} u^2 du$$

die Fresnelschen Integrale sind, zu nehmen für das Argument

$$s = H_1 \cdot \sqrt{\frac{2A}{\pi}} \quad \text{bzw.} \quad s = H_2 \cdot \sqrt{\frac{2A}{\pi}};$$

entsprechend:

$$(8) \int_{H_1}^{H_2} e^{iA\eta^2} \eta^{2n} \cdot \eta \, d\eta = \frac{n!!}{(-2iA)^n} \cdot \left[\frac{e^{iA\eta^2}}{2iA} \cdot f_n^*(-2iA\eta^2) \right]_{H_1}^{H_2},$$

wenn gesetzt wird:

$$(9) \quad \begin{cases} n!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (2n-1) \\ \text{und analog } n^*!! = 2^n \cdot n! = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \dots \cdot (2n) \\ 0!! = 0^*!! = 0! = 1 \end{cases}$$

$$(10) \quad f_n(z) = \sum_1^n \frac{z^\mu}{\mu!!}; \quad f_0(z) = 0.$$

$$(11) \quad \begin{cases} f_n^*(z) = \sum_0^n \frac{z^\mu}{\mu^*!!} \left[= \sum_0^n \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^\mu}{\mu!} = e_n\left(\frac{z}{2}\right) \right]; \\ f_0^*(z) = 1; \quad \left[e_\infty\left(\frac{z}{2}\right) = \right] f_\infty^*(z) = e^{\frac{z}{2}}. \end{cases}$$

Hierdurch gehen die angegebenen sechs Integrale in folgende neun Ausdrücke über:

$$\begin{aligned} & E \cdot \sum_0^\infty H_{2n} \cdot \frac{n!!}{(-2iA)^n} \cdot \left[\frac{e^{iA\eta^2}}{2iA} \cdot f_n^*(-2iA\eta^2) \right]_{H_1}^{H_2} \\ & + E \cdot \sqrt{\frac{\pi}{2A}} \cdot [C_u + i \cdot S_u] \cdot \frac{H_2 \cdot \sqrt{\frac{2A}{\pi}}}{H_1 \cdot \sqrt{\frac{2A}{\pi}}} \cdot \sum_0^\infty H_{2n} \cdot \frac{n!!}{(-2iA)^n} \\ & + F \cdot \sum_0^\infty H_{2n+1} \cdot \frac{(n+1)!!}{(-2iA)^{n+1}} \cdot \left[\frac{e^{iA\eta^2}}{2iA} \cdot f_{n+1}^*(-2iA\eta^2) \right]_{H_1}^{H_2} \\ & + F \cdot \sqrt{\frac{\pi}{2A}} \cdot [C_u + i \cdot S_u] \cdot \frac{H_2 \cdot \sqrt{\frac{2A}{\pi}}}{H_1 \cdot \sqrt{\frac{2A}{\pi}}} \cdot \sum_0^\infty H_{2n+1} \cdot \frac{(n+1)!!}{(-2iA)^{n+1}} \\ & + G \cdot \sum_0^\infty H_{2n} \cdot \frac{(n+1)!!}{(-2iA)^{n+1}} \cdot \left[\frac{e^{iA\eta^2}}{2iA} \cdot f_{n+1}^*(-2iA\eta^2) \right]_{H_1}^{H_2} \\ & + G \cdot \sqrt{\frac{\pi}{2A}} \cdot [C_u + i \cdot S_u] \cdot \frac{H_2 \cdot \sqrt{\frac{2A}{\pi}}}{H_1 \cdot \sqrt{\frac{2A}{\pi}}} \cdot \sum_0^\infty H_{2n} \cdot \frac{(n+1)!!}{(-2iA)^{n+1}} \end{aligned}$$

$$+ E \cdot \sum_0^{\infty} H_{2n+1} \cdot \frac{n^{*!!}}{(-2iA)^n} \cdot \left[\frac{e^{iA\eta^2}}{2iA} \cdot f_n^*(-2iA\eta^2) \right]_{H_1}^{H_2}$$

$$+ F \cdot \sum_0^{\infty} H_{2n} \cdot \frac{n^{*!!}}{(-2iA)^n} \cdot \left[\frac{e^{iA\eta^2}}{2iA} \cdot f_n^*(-2iA\eta^2) \right]_{H_1}^{H_2}$$

$$+ G \cdot \sum_0^{\infty} H_{2n+1} \cdot \frac{(n+1)^{*!!}}{(-2iA)^{n+1}} \cdot \left[\frac{e^{iA\eta^2}}{2iA} \cdot f_{n+1}^*(-2iA\eta^2) \right]_{H_1}^{H_2}.$$

Von diesen lassen sich nun jeweils die drei untereinander stehenden Summen (nach zweckentsprechender Änderung des Summationsbuchstabens in einigen von ihnen) zusammenfassen. Wir erhalten zunächst, wenn wir noch als Definition $H_{-1} = H_{-2} = 0$ setzen, statt der angegebenen neun Ausdrücke die folgenden Summen:

$$\begin{aligned} & \left[\frac{e^{iA\eta^2}}{2iA} \cdot \sum_0^{\infty} \frac{(n+1)^{*!!}}{(-2iA)^{n+1}} \cdot f_{n+1}^*(-2iA\eta^2) \cdot (E \cdot H_{2n+2} \right. \\ & \quad \left. + F \cdot H_{2n+1} + G \cdot H_{2n}) \right]_{H_1}^{H_2} \\ & + \sqrt{\frac{n}{2A}} \cdot [C_u + i \cdot S_u]_{H_1}^{H_2} \cdot \frac{\sqrt{2A}}{\pi} \sum_0^{\infty} \frac{n^{*!!}}{(-2iA)^n} \cdot (E \cdot H_{2n} + F \cdot H_{2n-1} \\ & \quad + G \cdot H_{2n-2}) \\ & + \left[\frac{e^{iA\eta^2}}{2iA} \cdot \sum_0^{\infty} \frac{n^{*!!}}{(-2iA)^n} \cdot f_n^*(-2iA\eta^2) \cdot (E \cdot H_{2n+1} + F \cdot H_{2n} \right. \\ & \quad \left. + G \cdot H_{2n-1}) \right]_{H_1}^{H_2}. \end{aligned}$$

Führen wir nun wieder für A und H_n die ursprünglichen Werte ein und beachten, daß für $p \neq 0$

$$J_p(\delta) = \frac{\delta}{2p} \cdot \{J_{p-1}(\delta) + J_{p+1}(\delta)\}$$

ist, so erhalten wir nach verschiedenen weiteren Umformungen, wenn wir noch einige unten angegebene abkürzende Bezeichnungen einführen, für u_p :

$$(12) \quad u_p = e^{ikx_p \left(1 - \frac{1}{2}\psi\right)} \cdot \{F(H_2) - F(H_1)\},$$

worin:

$$(13) \quad \psi = \frac{x_p}{b - x_p}; \quad H_1 = -\psi; \quad H_2 = \frac{1}{2} \sin^2 \Theta - \psi$$

$$(14) \quad F(H) = D(H) + E(H) + G(H) + K(H).$$

Ferner:

$$(15) \quad \left\{ \begin{aligned} D(H) &= \sqrt{\frac{\pi k}{b - x_P}} \cdot [i \cdot C_u - S_u] \cdot \sum_0^{\infty} (i\xi)^n \cdot n!! \\ &\quad \cdot \frac{\delta^{2n} \cdot J_{2n}(\delta)}{(2n)!} \cdot \{g_{2n} - i \cdot h_{2n+1}\}, \end{aligned} \right.$$

$$(16) \quad \left\{ \begin{aligned} E(H) &= \frac{e^{\frac{ik}{2}(b-x_P)H^2}}{(b-x_P) \cdot H} \cdot \sum_0^{\infty} (i\xi)^n \cdot n!! \\ &\quad \cdot \frac{\delta^{2n} \cdot J_{2n}(\delta)}{(2n)!} \cdot \{g_{2n} \cdot f_n - i \cdot h_{2n+1} \cdot f_{n+1}\}, \end{aligned} \right.$$

$$(17) \quad \left\{ \begin{aligned} G(H) &= \frac{e^{\frac{ik}{2}(b-x_P)H^2}}{2x_P} \cdot \sum_0^{\infty} (i\xi)^n \cdot n!! \\ &\quad \cdot \frac{\delta^{2n+1} \cdot J_{2n+1}(\delta)}{(2n+1)!} \cdot \{g_{2n+1} \cdot f_n^* - i \cdot h_{2n+2} \cdot f_{n+1}^*\}, \end{aligned} \right.$$

$$(18) \quad K(H) = \frac{e^{\frac{ik}{2}(b-x_P)H^2}}{b-x_P} \cdot J_0(\delta) \cdot F.$$

Hierin sind

$$(19) \quad C_u = C_u \left(H \cdot \sqrt{\frac{k(b-x_P)}{\pi}} \right) \quad \text{und} \quad S_u = S_u \left(H \cdot \sqrt{\frac{k(b-x_P)}{\pi}} \right)$$

die vom Argument $H \cdot \sqrt{\frac{k(b-x_P)}{\pi}}$ zu nehmenden Fresnelschen Integrale. Ferner ist:

$$(20) \quad \xi = \frac{b-x_P}{4kx_P^2} = \frac{1}{4kx_P\psi}; \quad \delta = k\rho_P\sqrt{2\psi};$$

$$(21) \quad f_n = f_n(-ik(b-x_P)H^2); \quad f_n^* = f_n^*(-ik(b-x_P)H^2).$$

$$(22) \quad g_n = E - F \cdot \frac{n \cdot \psi}{n-1}, \quad (n \neq 1); \quad g_1 = g_0;$$

$$(23) \quad h_n = F \cdot \frac{\delta^2}{4kx_P \cdot n} - G \cdot \frac{n}{k(b-x_P)}, \quad (n \neq 0).$$

Für die verschiedenen oben angegebenen Wertesysteme E, F, G , die von der Größe der Öffnung des Strahlenbündels abhängen, erhalten wir für g_n und h_n folgende Ausdrücke:

	$E = 1 + \psi + \frac{1}{2} \psi^2$ $F = 1 + 3\psi$ $G = \frac{3}{2}$	$E = 1 + \psi$ $F = 1$ $G = 0$	$E = 1$ $F = 0$ $G = 0$
$g_{n \pm 1}$	$1 - \frac{1}{n-1} \cdot \psi - \frac{3}{2} \frac{n+1}{n-1} \cdot \psi^2$	$1 - \frac{1}{n-1} \cdot \psi$	1
$g_1 (= g_0)$	$1 + \psi + \frac{3}{2} \psi^2$	$1 + \psi$	1
h_n ($n \neq 0$)	$\frac{1}{2k} \cdot \left\{ \frac{\delta^2}{2x_P n} \cdot (1 + 3\psi) - \frac{3n}{b - x_P} \right\}$	$\frac{\delta^2}{4kx_P \cdot n}$	0

Im allgemeinen wird es genügen, die in der letzten Spalte angegebenen Werte zu benutzen, also in der Ausgangsgleichung für u_P das Differential $d\vartheta$ durch das Differential $d(\sin \vartheta)$ ersetzt zu denken.¹⁾ Es vereinfachen sich dadurch die Ausdrücke $D(H)$; $E(H)$; $G(H)$ sehr wesentlich, während $K(H) = 0$ wird. Wir erhalten so:

$$(15^*) \quad D(H) = \sqrt{\frac{\pi k}{b - x_P}} \cdot [i \cdot C_n - S_n] \cdot \sum_0^{\infty} (i\xi)^n \cdot n!! \cdot \frac{\delta^{2n} \cdot J_{2n}(\delta)}{(2n)!},$$

$$(16^*) \quad E(H) = \frac{e^{ik \cdot \frac{1}{2}(b - x_P)H^2}}{(b - x_P) \cdot H} \cdot \sum_0^{\infty} (i\xi)^n \cdot n!! \cdot \frac{\delta^{2n} \cdot J_{2n}(\delta)}{(2n)!} \cdot f_n,$$

$$(17^*) \quad G(H) = -\frac{e^{ik \cdot \frac{1}{2}(b - x_P)H^2}}{2x_P} \cdot \sum_0^{\infty} (i\xi)^n \cdot n^*!! \cdot \frac{\delta^{2n+1} \cdot J_{2n+1}(\delta)}{(2n+1)!} \cdot f_n^*,$$

$$(18^*) \quad K(H) = 0.$$

Für die Rechnung sei bemerkt, daß die in $D(H_1)$ und $D(H_2)$ auftretenden Summen von H unabhängig und demnach identisch sind, sodaß $D(H_1)$ und $D(H_2)$ bei der zahlenmäßigen Auswertung zusammengefaßt werden können. Wir erwähnen noch, daß

$$\frac{n!!}{(2n)!} = \frac{1}{n^*!!} \quad \text{und} \quad \frac{n^*!!}{(2n+1)!} = \frac{1}{(n+1)!!}$$

ist. Daß die in $D(H)$, $E(H)$, $G(H)$ auftretenden Summen konvergieren, erkennt man sofort.

Um die beim Übergang über die Kaustik längs eines geometrisch-optischen Lichtstrahles auftretenden Lichtverhält-

1) Vgl. Anm. 1 auf S. 745.

nisse zu betrachten, haben wir in den Formeln (12) bis (23) die Variablen x_P und ϱ_P zu ersetzen durch die aus (1) sich ergebenden Werte

$$x_P = \frac{1}{8} b \cdot \cos \vartheta_P \cdot (3 \sin^4 \vartheta_P + B_P)$$

$$\varrho_P = \frac{1}{8} b \cdot \sin \vartheta_P \cdot (-4 \sin^2 \vartheta_P + 3 \sin^4 \vartheta_P + B_P)$$

und sodann ϑ_P konstant zu halten und B_P zu variieren.

Für die numerische Auswertung der Formeln dieses Paragraphen wurden verschiedene Tabellen aufgestellt, von denen einige, die allgemeineres Interesse beanspruchen dürfen, nachfolgend mitgeteilt seien.

Tabelle 1.

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot n; \quad n!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (2n-1);$$

$$n^*!! = 2^n \cdot n! = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \dots \cdot 2n; \quad (n = 0, 1, 2, \dots, 20)$$

n	$n!$	$n!!$	$2^n \cdot n! = n^*!!$
0	1,0 · 10 ⁰	1,0 · 10 ⁰	1,0 · 10 ⁰
1	1,0 · 10 ⁰	1,0 · 10 ⁰	2,0 · 10 ⁰
2	2,0 · 10 ⁰	3,0 · 10 ⁰	8,0 · 10 ⁰
3	6,0 · 10 ⁰	1,5 · 10 ⁺¹	4,8 · 10 ⁺¹
4	2,4 · 10 ⁺¹	1,05 · 10 ⁺²	3,84 · 10 ⁺²
5	1,2 · 10 ⁺²	9,45 · 10 ⁺²	3,84 · 10 ⁺³
6	7,2 · 10 ⁺²	1,0395 · 10 ⁺⁴	4,608 · 10 ⁺⁴
7	5,04 · 10 ⁺³	1,3514 · 10 ⁺⁵	6,4512 · 10 ⁺⁵
8	4,032 · 10 ⁺⁴	2,0270 · 10 ⁺⁶	1,0322 · 10 ⁺⁷
9	3,6288 · 10 ⁺⁵	3,4459 · 10 ⁺⁷	1,8579 · 10 ⁺⁸
10	3,6288 · 10 ⁺⁶	6,5473 · 10 ⁺⁸	3,7159 · 10 ⁺⁹
11	3,9917 · 10 ⁺⁷	1,3749 · 10 ⁺¹⁰	8,1750 · 10 ⁺¹⁰
12	4,7900 · 10 ⁺⁸	3,1623 · 10 ⁺¹¹	1,9620 · 10 ⁺¹²
13	6,2270 · 10 ⁺⁹	7,9059 · 10 ⁺¹²	5,1012 · 10 ⁺¹³
14	8,7178 · 10 ⁺¹⁰	2,1346 · 10 ⁺¹⁴	1,4283 · 10 ⁺¹⁵
15	1,3077 · 10 ⁺¹²	6,1903 · 10 ⁺¹⁵	4,2850 · 10 ⁺¹⁶
16	2,0923 · 10 ⁺¹³	1,9190 · 10 ⁺¹⁷	1,3712 · 10 ⁺¹⁸
17	3,5569 · 10 ⁺¹⁴	6,3327 · 10 ⁺¹⁸	4,6621 · 10 ⁺¹⁹
18	6,4024 · 10 ⁺¹⁵	2,2164 · 10 ⁺²⁰	1,6783 · 10 ⁺²¹
19	1,2165 · 10 ⁺¹⁷	8,2008 · 10 ⁺²¹	6,3777 · 10 ⁺²²
20	2,4329 · 10 ⁺¹⁸	3,1983 · 10 ⁺²³	2,5511 · 10 ⁺²⁴

Tabelle 2.

Die Reziprokwerte von

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot n; n!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (2n-1);$$

$$.n^*!! = 2^n \cdot n! = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \dots \cdot 2n; (n = 0, 1, 2, \dots, 20)$$

n	$\frac{1}{n!}$	$\frac{1}{n!!}$	$\frac{(\frac{1}{2})^n}{n!} = \frac{1}{2^n \cdot n!} = \frac{1}{n^*!!}$
0	1,0 · 10 ⁰	1,0 · 10 ⁰	1,0 · 10 ⁰
1	1,0 · 10 ⁰	1,0 · 10 ⁰	5,0 · 10 ⁻¹
2	5,0 · 10 ⁻¹	3,33333 · 10 ⁻¹	1,25 · 10 ⁻¹
3	1,6667 · 10 ⁻¹	6,66667 · 10 ⁻²	2,08333 · 10 ⁻²
4	4,1667 · 10 ⁻²	9,52381 · 10 ⁻³	2,60416 · 10 ⁻³
5	8,3333 · 10 ⁻³	1,05820 · 10 ⁻³	2,60416 · 10 ⁻⁴
6	1,3889 · 10 ⁻³	9,62001 · 10 ⁻⁵	2,17013 · 10 ⁻⁵
7	1,9841 · 10 ⁻⁴	7,40001 · 10 ⁻⁶	1,55010 · 10 ⁻⁶
8	2,4802 · 10 ⁻⁵	4,93334 · 10 ⁻⁷	9,68812 · 10 ⁻⁸
9	2,7557 · 10 ⁻⁶	2,90197 · 10 ⁻⁸	5,38228 · 10 ⁻⁹
10	2,7557 · 10 ⁻⁷	1,52735 · 10 ⁻⁹	2,69114 · 10 ⁻¹⁰
11	2,5052 · 10 ⁻⁸	7,2731 · 10 ⁻¹¹	1,22324 · 10 ⁻¹¹
12	2,0877 · 10 ⁻⁹	3,1622 · 10 ⁻¹²	5,0969 · 10 ⁻¹³
13	1,6059 · 10 ⁻¹⁰	1,2649 · 10 ⁻¹³	1,9603 · 10 ⁻¹⁴
14	1,1471 · 10 ⁻¹¹	4,6848 · 10 ⁻¹⁵	7,0012 · 10 ⁻¹⁶
15	7,6472 · 10 ⁻¹³	1,6154 · 10 ⁻¹⁶	2,3337 · 10 ⁻¹⁷
16	4,7795 · 10 ⁻¹⁴	5,2111 · 10 ⁻¹⁸	7,2929 · 10 ⁻¹⁹
17	2,8115 · 10 ⁻¹⁵	1,5791 · 10 ⁻¹⁹	2,1450 · 10 ⁻²⁰
18	1,5619 · 10 ⁻¹⁶	4,5118 · 10 ⁻²¹	5,9583 · 10 ⁻²²
19	8,2206 · 10 ⁻¹⁸	1,2194 · 10 ⁻²²	1,5680 · 10 ⁻²³
20	4,1103 · 10 ⁻¹⁹	3,1267 · 10 ⁻²⁴	3,9199 · 10 ⁻²⁵

Tabelle 3.

$$n!! \cdot \frac{\delta^{2n} \cdot J_{2n}(\delta)}{(2n)!} = \frac{\delta^{2n} \cdot J_{2n}(\delta)}{n^*!!}$$

$$\left[\text{wird für } \delta = 0 \text{ gleich } \begin{cases} 1, & \text{wenn } n = 0 \\ 0, & \text{wenn } n > 0 \end{cases} \right].$$

n	$\delta = 1$	$\delta = 2$	$\delta = 3$
0	+ 7,652 · 10 ⁻¹	+ 2,239 · 10 ⁻¹	- 2,601 · 10 ⁻¹
1	+ 5,7450 · 10 ⁻²	+ 7,056 · 10 ⁻¹	+ 2,1875 · 10 ⁰
2	+ 3,0963 · 10 ⁻⁴	+ 6,800 · 10 ⁻²	+ 1,3365 · 10 ⁰
3	+ 4,3624 · 10 ⁻⁷	+ 1,6026 · 10 ⁻³	+ 1,7298 · 10 ⁻¹
4	+ 2,4537 · 10 ⁻¹⁰	+ 1,4787 · 10 ⁻⁵	+ 8,4456 · 10 ⁻³
5	+ 6,8517 · 10 ⁻¹⁴	+ 6,7068 · 10 ⁻⁸	+ 1,9884 · 10 ⁻⁴
6	+ 1,0851 · 10 ⁻¹⁷	+ 1,7182 · 10 ⁻¹⁰	+ 2,6249 · 10 ⁻⁶
7	+ 1,0680 · 10 ⁻²¹	+ 2,7251 · 10 ⁻¹³	+ 2,1353 · 10 ⁻⁸
8	+ 9,6881 · 10 ⁻²⁸	+ 2,8609 · 10 ⁻¹⁶	+ 1,1464 · 10 ⁻¹⁰
9	—	+ 2,0881 · 10 ⁻¹⁹	+ 4,2747 · 10 ⁻¹³
10	—	—	+ 1,1623 · 10 ⁻¹⁵

Tabelle 3. (Fortsetzung.)

n	$\delta = 4$	$\delta = 5$	$\delta = 6$
0	$-3,971 \cdot 10^{-1}$	$-1,776 \cdot 10^{-1}$	$+1,506 \cdot 10^{-1}$
1	$+2,9128 \cdot 10^0$	$+5,8213 \cdot 10^{-1}$	$-4,3722 \cdot 10^0$
2	$+8,9952 \cdot 10^0$	$+3,0563 \cdot 10^{+1}$	$+5,7931 \cdot 10^{+1}$
3	$+4,1889 \cdot 10^0$	$+4,2643 \cdot 10^{+1}$	$+2,3891 \cdot 10^{+2}$
4	$+6,8763 \cdot 10^{-1}$	$+1,8728 \cdot 10^{+1}$	$+2,4726 \cdot 10^{+2}$
5	$+5,3251 \cdot 10^{-2}$	$+3,7334 \cdot 10^0$	$+1,0966 \cdot 10^{+2}$
6	$+2,2806 \cdot 10^{-2}$	$+4,0414 \cdot 10^{-1}$	$+2,5755 \cdot 10^{+1}$
7	$+5,9753 \cdot 10^{-5}$	$+2,6500 \cdot 10^{-2}$	$+3,6149 \cdot 10^0$
8	$+1,0286 \cdot 10^{-6}$	$+1,1346 \cdot 10^{-3}$	$+3,2852 \cdot 10^{-1}$
9	$+1,2254 \cdot 10^{-8}$	$+3,3488 \cdot 10^{-5}$	$+2,0477 \cdot 10^{-2}$
10	$+1,0534 \cdot 10^{-10}$	$+7,1089 \cdot 10^{-7}$	$+9,1465 \cdot 10^{-4}$
<hr/>			
n	$\delta = 7$	$\delta = 8$	$\delta = 9$
0	$+3,001 \cdot 10^{-1}$	$+1,717 \cdot 10^{-1}$	$-9,033 \cdot 10^{-2}$
1	$-7,3843 \cdot 10^0$	$-3,616 \cdot 10^0$	$+5,8644 \cdot 10^0$
2	$+4,7361 \cdot 10^{+1}$	$-5,3965 \cdot 10^{+1}$	$-2,1774 \cdot 10^{+2}$
3	$+8,3138 \cdot 10^{+2}$	$+1,8437 \cdot 10^{+3}$	$+2,2618 \cdot 10^{+3}$
4	$+1,9217 \cdot 10^{+3}$	$+9,7649 \cdot 10^{+3}$	$+3,4202 \cdot 10^{+4}$
5	$+1,7317 \cdot 10^{+3}$	$+1,6992 \cdot 10^{+4}$	$+1,1323 \cdot 10^{+5}$
6	$+7,9776 \cdot 10^{+2}$	$+1,4352 \cdot 10^{+4}$	$+1,6787 \cdot 10^{+5}$
7	$+2,1573 \cdot 10^{+2}$	$+6,9470 \cdot 10^{+3}$	$+1,3812 \cdot 10^{+5}$
8	$+3,7380 \cdot 10^{+1}$	$+2,1273 \cdot 10^{+3}$	$+7,0609 \cdot 10^{+4}$
9	$+4,4147 \cdot 10^0$	$+4,3999 \cdot 10^{+2}$	$+2,4139 \cdot 10^{+4}$
10	$+3,7170 \cdot 10^{-1}$	$+6,4565 \cdot 10^{+1}$	$+5,8140 \cdot 10^{+3}$
<hr/>			
n	$\delta = 10$	$\delta = 11$	$\delta = 12$
0	$-2,459 \cdot 10^{-1}$	$-1,712 \cdot 10^{-1}$	$+4,769 \cdot 10^{-2}$
1	$+1,273 \cdot 10^{+1}$	$+8,4095 \cdot 10^0$	$-6,1150 \cdot 10^0$
2	$-2,745 \cdot 10^{+2}$	$-2,7525 \cdot 10^{+1}$	$+4,7304 \cdot 10^{+2}$
3	$-3,0125 \cdot 10^{+2}$	$-7,4407 \cdot 10^{+3}$	$-1,5160 \cdot 10^{+4}$
4	$+8,2788 \cdot 10^{+4}$	$+1,2560 \cdot 10^{+5}$	$+5,0503 \cdot 10^{+4}$
5	$+5,4037 \cdot 10^{+5}$	$+1,8940 \cdot 10^{+6}$	$+4,8453 \cdot 10^{+6}$
6	$+1,3752 \cdot 10^{+6}$	$+8,2817 \cdot 10^{+6}$	$+3,7789 \cdot 10^{+7}$
7	$+1,8539 \cdot 10^{+6}$	$+1,7877 \cdot 10^{+7}$	$+1,2944 \cdot 10^{+8}$
8	$+1,5181 \cdot 10^{+6}$	$+2,2748 \cdot 10^{+7}$	$+2,5057 \cdot 10^{+8}$
9	$+8,2026 \cdot 10^{+5}$	$+1,8793 \cdot 10^{+7}$	$+3,0836 \cdot 10^{+8}$
10	$+3,0975 \cdot 10^{+5}$	$+1,0737 \cdot 10^{+7}$	$+2,5916 \cdot 10^{+8}$
<hr/>			
n	$\delta = 13$	$\delta = 14$	$\delta = 15$
0	$+2,069 \cdot 10^{-1}$	$+1,711 \cdot 10^{-1}$	$-1,422 \cdot 10^{-2}$
1	$-1,8396 \cdot 10^{+1}$	$-1,4896 \cdot 10^{+1}$	$+4,8766 \cdot 10^0$
2	$+7,8292 \cdot 10^{+2}$	$+3,6610 \cdot 10^{+2}$	$-7,5431 \cdot 10^{+2}$
3	$-1,1866 \cdot 10^{+4}$	$+1,2732 \cdot 10^{+4}$	$+4,8910 \cdot 10^{+4}$
4	$-2,9953 \cdot 10^{+5}$	$-8,9165 \cdot 10^{+5}$	$-1,1613 \cdot 10^{+6}$
5	$+8,3939 \cdot 10^{+6}$	$+6,4035 \cdot 10^{+6}$	$-1,3526 \cdot 10^{+7}$
6	$+1,3221 \cdot 10^{+8}$	$+3,5125 \cdot 10^{+8}$	$+6,6648 \cdot 10^{+8}$
7	$+7,2508 \cdot 10^{+8}$	$+3,1952 \cdot 10^{+9}$	$+1,1150 \cdot 10^{+10}$
8	$+2,1094 \cdot 10^{+9}$	$+1,3954 \cdot 10^{+10}$	$+7,3944 \cdot 10^{+10}$
9	$+3,7946 \cdot 10^{+9}$	$+3,6233 \cdot 10^{+10}$	$+2,7546 \cdot 10^{+11}$
10	$+4,5881 \cdot 10^{+9}$	$+6,1987 \cdot 10^{+10}$	$+6,5862 \cdot 10^{+11}$

Tabelle 4.

$$n^{*!!} \cdot \frac{\delta^{2n+1} \cdot J_{2n+1}(\delta)}{(2n+1)!} = \frac{\delta^{2n+1} \cdot J_{2n+1}(\delta)}{(n+1)!!} \quad [\text{wird für } \delta = 0 \text{ gleich } 0].$$

n	$\delta = 1$	$\delta = 2$	$\delta = 3$
0	$+ 4,4010 \cdot 10^{-1}$	$+ 1,1534 \cdot 10^0$	$+ 1,0173 \cdot 10^0$
1	$+ 6,5199 \cdot 10^{-3}$	$+ 3,4374 \cdot 10^{-1}$	$+ 2,7819 \cdot 10^0$
2	$+ 1,6653 \cdot 10^{-5}$	$+ 1,5018 \cdot 10^{-2}$	$+ 6,9709 \cdot 10^{-1}$
3	$+ 1,4305 \cdot 10^{-8}$	$+ 2,1320 \cdot 10^{-4}$	$+ 5,3051 \cdot 10^{-2}$
4	$+ 5,5545 \cdot 10^{-12}$	$+ 1,3502 \cdot 10^{-6}$	$+ 1,7580 \cdot 10^{-3}$
5	$+ 1,1525 \cdot 10^{-15}$	$+ 4,5393 \cdot 10^{-9}$	$+ 3,0573 \cdot 10^{-5}$
6	$+ 1,4252 \cdot 10^{-19}$	$+ 9,0628 \cdot 10^{-12}$	$+ 3,1371 \cdot 10^{-7}$
7	$+ 1,1347 \cdot 10^{-23}$	$+ 1,1612 \cdot 10^{-14}$	$+ 2,0585 \cdot 10^{-9}$
8	—	$+ 1,0114 \cdot 10^{-17}$	$+ 9,1591 \cdot 10^{-12}$
9	—	$+ 6,4064 \cdot 10^{-21}$	$+ 2,8902 \cdot 10^{-14}$
10	—	—	$+ 6,6948 \cdot 10^{-17}$

n	$\delta = 4$	$\delta = 5$	$\delta = 6$
0	$- 2,6416 \cdot 10^{-1}$	$- 1,6380 \cdot 10^0$	$- 1,6602 \cdot 10^0$
1	$+ 9,1775 \cdot 10^0$	$+ 1,5200 \cdot 10^{+1}$	$+ 8,2656 \cdot 10^0$
2	$+ 9,0181 \cdot 10^0$	$+ 5,4395 \cdot 10^{+1}$	$+ 1,8771 \cdot 10^{+2}$
3	$+ 2,3687 \cdot 10^0$	$+ 3,9717 \cdot 10^{+1}$	$+ 3,4553 \cdot 10^{+2}$
4	$+ 2,6037 \cdot 10^{-1}$	$+ 1,1409 \cdot 10^{+1}$	$+ 2,2578 \cdot 10^{+2}$
5	$+ 1,4768 \cdot 10^{-2}$	$+ 1,6483 \cdot 10^0$	$+ 7,1477 \cdot 10^{+1}$
6	$+ 4,8961 \cdot 10^{-4}$	$+ 1,3739 \cdot 10^{-1}$	$+ 1,2826 \cdot 10^{+1}$
7	$+ 1,0319 \cdot 10^{-5}$	$+ 7,2224 \cdot 10^{-3}$	$+ 1,4363 \cdot 10^0$
8	$+ 1,4693 \cdot 10^{-7}$	$+ 2,5529 \cdot 10^{-4}$	$+ 1,0743 \cdot 10^{-1}$
9	$+ 1,4764 \cdot 10^{-9}$	$+ 6,3595 \cdot 10^{-6}$	$+ 5,6421 \cdot 10^{-3}$
10	$+ 1,0905 \cdot 10^{-11}$	$+ 1,1597 \cdot 10^{-7}$	$+ 2,1619 \cdot 10^{-4}$

n	$\delta = 7$	$\delta = 8$	$\delta = 9$
0	$- 3,2781 \cdot 10^{-2}$	$+ 1,8768 \cdot 10^0$	$+ 2,2077 \cdot 10^0$
1	$- 1,9162 \cdot 10^{+1}$	$- 4,9682 \cdot 10^{+1}$	$- 4,3959 \cdot 10^{+1}$
2	$+ 3,8982 \cdot 10^{+2}$	$+ 4,0588 \cdot 10^{+2}$	$- 2,1667 \cdot 10^{+2}$
3	$+ 1,8322 \cdot 10^{+3}$	$+ 6,4033 \cdot 10^{+3}$	$+ 1,4918 \cdot 10^{+4}$
4	$+ 2,5161 \cdot 10^{+3}$	$+ 1,7938 \cdot 10^{+4}$	$+ 8,8103 \cdot 10^{+4}$
5	$+ 1,5855 \cdot 10^{+3}$	$+ 2,1155 \cdot 10^{+4}$	$+ 1,8784 \cdot 10^{+5}$
6	$+ 5,5222 \cdot 10^{+2}$	$+ 1,3323 \cdot 10^{+4}$	$+ 2,0371 \cdot 10^{+5}$
7	$+ 1,1849 \cdot 10^{+2}$	$+ 5,0790 \cdot 10^{+3}$	$+ 1,3062 \cdot 10^{+5}$
8	$+ 1,6837 \cdot 10^{+1}$	$+ 1,2690 \cdot 10^{+3}$	$+ 5,4205 \cdot 10^{+4}$
9	$+ 1,6711 \cdot 10^0$	$+ 2,1995 \cdot 10^{+2}$	$+ 1,5469 \cdot 10^{+4}$
10	$+ 1,2049 \cdot 10^{-1}$	$+ 2,7571 \cdot 10^{+1}$	$+ 3,1756 \cdot 10^{+3}$

Tabelle 4. (Fortsetzung.)

n	$\delta = 10$	$\delta = 11$	$\delta = 12$
0	$+ 4,3470 \cdot 10^{-1}$	$- 1,9448 \cdot 10^0$	$- 2,6808 \cdot 10^0$
1	$+ 1,9460 \cdot 10^{+1}$	$+ 1,0085 \cdot 10^{+2}$	$+ 1,1238 \cdot 10^{+2}$
2	$- 1,5607 \cdot 10^{+3}$	$- 2,5586 \cdot 10^{+3}$	$- 1,2188 \cdot 10^{+3}$
3	$+ 2,0638 \cdot 10^{+4}$	$+ 3,4111 \cdot 10^{+3}$	$- 5,8117 \cdot 10^{+4}$
4	$+ 3,0889 \cdot 10^{+5}$	$+ 7,7074 \cdot 10^{+5}$	$+ 1,2580 \cdot 10^{+6}$
5	$+ 1,1842 \cdot 10^{+6}$	$+ 5,5168 \cdot 10^{+6}$	$+ 1,9328 \cdot 10^{+7}$
6	$+ 2,1438 \cdot 10^{+6}$	$+ 1,6424 \cdot 10^{+7}$	$+ 9,5087 \cdot 10^{+7}$
7	$+ 2,2240 \cdot 10^{+6}$	$+ 2,6811 \cdot 10^{+7}$	$+ 2,4026 \cdot 10^{+8}$
8	$+ 1,4673 \cdot 10^{+6}$	$+ 2,7224 \cdot 10^{+7}$	$+ 3,6686 \cdot 10^{+8}$
9	$+ 6,5907 \cdot 10^{+5}$	$+ 1,8589 \cdot 10^{+7}$	$+ 3,7037 \cdot 10^{+8}$
10	$+ 2,1143 \cdot 10^{+5}$	$+ 8,9884 \cdot 10^{+6}$	$+ 2,6229 \cdot 10^{+8}$

n	$\delta = 13$	$\delta = 14$	$\delta = 15$
0	$- 9,1416 \cdot 10^{-1}$	$+ 1,8676 \cdot 10^0$	$+ 3,0765 \cdot 10^0$
1	$+ 2,4313 \cdot 10^0$	$- 1,6171 \cdot 10^{+2}$	$- 2,1825 \cdot 10^{+2}$
2	$+ 3,2575 \cdot 10^{+3}$	$+ 7,9024 \cdot 10^{+3}$	$+ 6,6066 \cdot 10^{+3}$
3	$- 1,4378 \cdot 10^{+5}$	$- 1,5139 \cdot 10^{+5}$	$+ 5,6073 \cdot 10^{+4}$
4	$+ 7,5158 \cdot 10^{+5}$	$- 2,4989 \cdot 10^{+6}$	$- 8,9496 \cdot 10^{+6}$
5	$+ 5,0464 \cdot 10^{+7}$	$+ 9,1822 \cdot 10^{+7}$	$+ 8,3169 \cdot 10^{+7}$
6	$+ 4,2607 \cdot 10^{+8}$	$+ 1,4895 \cdot 10^{+9}$	$+ 4,0138 \cdot 10^{+9}$
7	$+ 1,6575 \cdot 10^{+9}$	$+ 9,0103 \cdot 10^{+9}$	$+ 3,9166 \cdot 10^{+10}$
8	$+ 3,7429 \cdot 10^{+9}$	$+ 2,9837 \cdot 10^{+10}$	$+ 1,9022 \cdot 10^{+11}$
9	$+ 5,4751 \cdot 10^{+9}$	$+ 6,2291 \cdot 10^{+10}$	$+ 5,6104 \cdot 10^{+11}$
10	$+ 5,5470 \cdot 10^{+9}$	$+ 8,8690 \cdot 10^{+10}$	$+ 1,1079 \cdot 10^{+12}$

§ 15.

Betrachten wir speziell die Lichtverhältnisse in der durch die Spitze der geometrisch-optischen Kaustik gelegten achsen-senkrechten Ebene, so erhalten wir u_P entweder direkt aus (3*) des vorigen Paragraphen, indem wir dort $x_P = 0$ setzen und darauf die Integration in ähnlicher Art wie vorstehend ausführen, oder indem wir in den Gleichungen (12) bis (23) des § 14 $x_P = 0$ setzen. In diesem Falle haben wir zu be-
achten, daß jetzt

$$\psi = 0; \quad H_1 = 0; \quad H_2 = \frac{1}{2} \sin^2 \Theta; \quad \delta = 0; \quad g_n = 1;$$

$$h_n = F \cdot \frac{k \varrho_P^3}{2b \cdot n} - G \cdot \frac{n}{kb} \quad (n \neq 0);$$

$$(E, F, G) = (1, 1, \frac{3}{2}) \text{ bzw. } (1, 1, 0) \text{ bzw. } (1, 0, 0); \quad (f_n)_{H_1} = 0; \quad (f_n^*)_{H_1} = 1;$$

$$\xi^n \cdot \delta^{2n} \cdot J_{2n}(\delta) = (\xi \cdot \delta^4)^n \cdot \frac{J_{2n}(\delta)}{\delta^{2n}} = \left(\frac{k^3 \varrho_P^4}{b} \right)^n \cdot \frac{1}{(2n)!};$$

$$\frac{1}{2x_P} \cdot \xi^n \cdot \delta^{2n+1} \cdot J_{2n+1}(\delta) = \frac{k^3 \varrho_P^3}{b} \left(\frac{k^3 \varrho_P^4}{b} \right)^n \cdot \frac{1}{(2n+1)!}.$$

$$(4^*) \left\{ \begin{aligned} G(H_2) = & - \frac{e^{ik \cdot \frac{1}{2} b \cdot H_2^2}}{b} \cdot k^2 \varrho_P^2 \cdot \sum_0^\infty \left(i \cdot \frac{k^3 \varrho_P^4}{b} \right)^n \\ & \cdot \frac{1}{(2n+1)^*!! \cdot (n+1)!!} \cdot f_n^* ; \end{aligned} \right.$$

$$(5^*) \quad G(H_1) = - \frac{1}{b} \cdot k^2 \varrho_P^2 \cdot \sum_0^\infty \left(i \cdot \frac{k^3 \varrho_P^4}{b} \right)^n \cdot \frac{1}{(2n+1)^*!! \cdot (n+1)!!}.$$

Die Funktionen C_u und S_u sind die vom Argument

$$\left(\frac{1}{2} \sin^2 \Theta \cdot \sqrt{\frac{k b}{\pi}} \right)$$

zu nehmenden Fresnelschen Integrale. Die Funktionen f_n und f_n^* sind zu nehmen vom Argument $(-i k \cdot \frac{1}{4} b \cdot \sin^2 \Theta)$.

§ 16.

Um die Lichtverhältnisse auf der Achse des Strahlenbündels zu erhalten, haben wir entweder in (3*) des § 14 $\varrho_P = 0$, also $J_0(k \varrho_P \sin \vartheta) = 1$ zu setzen und sodann das Integral auszuwerten oder in den Formeln (12) bis (23) des § 14 $\varrho_P = 0$ zu setzen. Wir erhalten so, da $\delta = 0$ wird:

$$D(H) = \sqrt{\frac{\pi k}{b - x_P}} \cdot [i \cdot C_u - S_u] \cdot \left\{ E + i \cdot G \cdot \frac{1}{k(b - x_P)} \right\},$$

$$E(H) = \frac{e^{ik \cdot \frac{1}{2} (b - x_P) H^2}}{b - x_P} \cdot G,$$

$$G(H) = 0,$$

$$K(H) = \frac{e^{ik \cdot \frac{1}{2} (b - x_P) H^2}}{b - x_P} \cdot F,$$

so daß sich für u_P ergibt:

$$(1) \quad u_P = u(x_P, 0) = e^{ik x_P \left(1 - \frac{1}{2} \psi\right)} \cdot \{F(H_2) - F(H_1)\},$$

worin

$$(2) \quad \psi = \frac{x_P}{b - x_P}; \quad H_1 = -\psi; \quad H_2 = \frac{1}{2} \sin^2 \Theta - \psi,$$

$$(3) \quad \begin{aligned} F(H) = & \sqrt{\frac{\pi k}{b - x_P}} \cdot [i \cdot C_u - S_u] \cdot \left\{ E + i \cdot G \cdot \frac{1}{k(b - x_P)} \right\} \\ & + \frac{e^{ik \cdot \frac{1}{2} (b - x_P) H^2}}{b - x_P} \cdot (F + G). \end{aligned}$$

Die Fresnelschen Integrale C_u und S_u sind wieder zu nehmen von

$$\left(H \cdot \sqrt{\frac{k}{\pi} \cdot (b - x_P)} \right).$$

Setzen wir wieder $E = 1$; $F = 0$; $G = 0$, so ergibt sich statt (3):

$$(3^*) \quad F(H) = \sqrt{\frac{\pi k}{b - x_P}} \cdot [i \cdot C_u - S_u].$$

Betrachten wir (3*) und (3), so erkennen wir sofort, daß die fortgelassenen Glieder klein sind gegen das in (3*) stehengebliebene Glied, da bei diesem im Nenner das Glied $\sqrt{b - x_P}$ bei den vernachlässigten dagegen $(b - x_P)$ bzw. $(b - x_P)^{3/2}$ und höhere Potenzen von $(b - x_P)$ auftreten.

Setzen wir (3*) in (1) ein, so erhalten wir für $u_P = u(x_P, 0)$, wenn wir (1) etwas anders schreiben:

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} u_P = u(x_P, 0) &= i k \cdot \frac{1}{2} \sin^2 \Theta \cdot e^{ik \left(x_P - \frac{1}{2} \cdot \frac{x_P^2}{b - x_P} \right)} \\ &\cdot \frac{1}{s_2 - s_1} \cdot \int_{s_1}^{s_2} e^{i \frac{\pi}{2} \delta^2} d\delta, \end{aligned} \right.$$

worin:

$$(5) \quad s_1 = - \frac{x_P}{b - x_P} \cdot \sqrt{\frac{k}{\pi} \cdot (b - x_P)},$$

$$(6) \quad s_2 = \left(\frac{1}{2} \sin^2 \Theta - \frac{x_P}{b - x_P} \right) \cdot \sqrt{\frac{k}{\pi} \cdot (b - x_P)}.$$

Hier kann $(b - x_P)$ auch negative Werte annehmen, es können also s_1 und s_2 auch imaginär werden. Beachten wir nun, daß $C_u(i\alpha) = i \cdot C_u(\alpha)$ und $S_u(i\alpha) = -i \cdot S_u(\alpha)$ ist, so können wir statt (4) auch schreiben;

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} u_P = u(x_P, 0) &= i k \cdot \frac{1}{2} \sin^2 \Theta \cdot e^{ik \left(x_P - \frac{1}{2} \cdot \frac{x_P^2}{b - x_P} \right)} \\ &\cdot \frac{1}{s_2 - s_1} \cdot \int_{s_1}^{s_2} e^{\pm i \frac{\pi}{2} \delta^2} d\delta, \end{aligned} \right.$$

wo jetzt

$$(8) \quad s_1 = - \frac{x_P}{b - x_P} \cdot \sqrt{\frac{k}{\pi} \cdot |b - x_P|},$$

$$(9) \quad s_2 = \left(\frac{1}{2} \sin^2 \Theta - \frac{x_P}{b - x_P} \right) \cdot \sqrt{\frac{k}{\pi} \cdot |b - x_P|}$$

und im Exponenten des Integranden das $+$ -Zeichen gilt, wenn $(b - x_P) > 0$, dagegen das $-$ -Zeichen, wenn $(b - x_P) < 0$. (Vergleiche hierzu Gleichung (2*) des § 11 und (4) des § 12. Es ist zu beachten, daß das hier auftretende b dem $-q_n$ dort entspricht, wie ein Vergleich der Gleichungen der zugehörigen Kennflächen zeigt.)

§ 17.

Wir können unter Benutzung von (7), (8), (9) des vorigen Paragraphen und der Cornuschen Spiralen schon ohne numerische Rechnung einen gewissen Einblick in die Lichtintensitätsverhältnisse auf der Achse des Strahlenbündels bekommen. Bezeichnen wir wieder den absoluten Betrag der Verbindungslinie der beiden durch s_1 bzw. s_2 bestimmten Punkte der Cornuschen Spirale durch a , so ist die Intensität proportional dem Ausdruck $\left(\frac{a}{s_2 - s_1} \right)^2$. Für $x_P = 0$, also in der Spitze der geometrisch-optischen Kaustik, wird $s_1 = 0$ und $s_2 = \frac{1}{2} \sin^2 \Theta \cdot \sqrt{2|b|}$, wenn wir noch x_P und b in Wellenlängen als Maßeinheit gemessen denken. Nehmen wir nun b so groß an, daß wir in der Nähe der Spitze der Kaustik¹⁾ $\sqrt{2|b - x_P|}$ in erster Näherung gleich $\sqrt{2|b|}$ setzen dürfen, so sehen wir, daß beim Fortschreiten des Aufpunktes in Richtung positiver x -Werte, also ins Innere der Kaustik hinein, der dem Werte s_1 entsprechende Punkt Q_1 (b als positiv vorausgesetzt) auf dem in dritten Quadranten liegenden Zweige vom Nullpunkt fortwandert, während ihm in einer gewissen, in erster Näherung konstant bleibenden Entfernung

$$s_2 - s_1 = \frac{1}{2} \sin^2 \Theta \sqrt{2|b - x_P|} \approx \frac{1}{2} \sin^2 \Theta \sqrt{2|b|}$$

der dem Werte s_2 entsprechende Punkt Q_2 folgt. Schreitet dagegen der Aufpunkt in Richtung negativer x -Werte fort, entfernt er sich also mehr und mehr von der Kaustik, so wandert Q_1 auf dem in ersten Quadranten liegenden Zweige vom Nullpunkte fort und folgt dem ihm in nahezu konstantem Abstände $\frac{1}{2} \sin^2 \Theta \cdot \sqrt{2|b - x_P|}$ vorhergehenden Punkte Q_2 .

1) Wir wollen bei diesen Überlegungen als „Kaustik“ die nicht ausgeartete achsensymmetrische Schale der Kaustik verstehen.

Man erkennt nun leicht, daß in *diesem* Falle die Intensität mehr und mehr abnimmt. Je nach der Größe des Wertes b werden sich hierbei jedoch kleine Maxima und Minima, also geringe Schwankungen der Intensität ausprägen. Das Auftreten der Maxima und Minima erkennt man leicht durch folgende Überlegung. Da die Krümmung der Cornuschen Spirale zum Windungspunkte hin ständig zunimmt, so werden sich bei nahezu konstantem Abstände der Punkte Q_1 und Q_2 in gewisser Reihenfolge die beiden Extremlagen der Punkte Q_1 und Q_2 ergeben: 1. Die Verbindungslinie der beiden Punkte geht durch den Windungspunkt hindurch; 2. Die *Verlängerung* dieser Verbindungslinie geht durch den Windungspunkt hindurch. Da die Intensität in erster Näherung dem Quadrat der Länge der Verbindungslinie $\overline{Q_1 Q_2}$ proportional ist¹⁾, so entspricht der ersten der beiden angegebenen Extremlagen ein Maximum, der zweiten ein Minimum der Intensität.

Wandert hingegen der Aufpunkt auf der Achse des Bündels in das Innere der Kaustik hinein, so schreitet — wie wir sahen — der Punkt Q_1 auf dem im dritten Quadranten liegenden Zweige der Cornuschen Spirale fort. Da also jetzt Q_1 und Q_2 in verschiedenen Quadranten liegen, so wird a , und mithin die Intensität größere Werte annehmen²⁾ als in der Spitze der Kaustik. Eine besonders ausgezeichnete Lage der Punkte Q_1 und Q_2 ist diejenige, bei der die Verbindungslinie durch den Nullpunkt der komplexen Ebene der Cornuschen Spirale hindurchgeht, bei der also

$$s_1 = -s_2, \text{ d. h. } \frac{x_P}{b - x_P} = \frac{1}{4} \sin^2 \Theta; \quad x_P = b \cdot \frac{\sin^2 \Theta}{4 + \sin^2 \Theta}$$

ist. Diesen Punkt x_P können wir etwa als *Symmetriepunkt des Strahlenbündels* betrachten und ihn dem Brennpunkt einer Kugelhelle als Analogon gegenüberstellen. Das soll jedoch nicht heißen, daß in ihm die Intensität in allen Fällen ein Maximum ist, sondern nur, daß auf beiden Seiten von ihm auf der Achse die Lichtverhältnisse annähernd symmetrisch sind. Ob im Punkte $x_P = b \cdot \frac{\sin^2 \Theta}{4 + \sin^2 \Theta}$ ein Intensitätsmaximum vorhanden ist, oder ob in ihm selbst ein Minimum liegt, das beiderseits

1) Die Bogenlänge $\widehat{Q_1 Q_2}$ war in erster Näherung konstant.

2) Da wir b als groß annahmen.

in mehr oder weniger großem Abstände von Intensitätsmaxima umgeben ist, hängt von der Größe

$$\frac{1}{2} \sin^2 \Theta \cdot \sqrt{2|b - x_P|} (\approx \frac{1}{2} \sin^2 \Theta \cdot \sqrt{2|b|})$$

ab. Hat diese etwa den Wert 3,8, so liegt bei $s_1 = -s_2$ der Punkt Q_1 in $-1,9$, der Punkt Q_2 in $+1,9$ der Cornuschen Spirale. Wandert nun z. B. Q_1 zum Werte $-1,3$, so wandert Q_2 zum Werte $+2,5$. Wandert umgekehrt Q_1 zum Werte $-2,5$, so wandert Q_2 zum Werte $+1,3$. Man sieht nun sofort, daß die Verbindungslinie der Punkte $-1,3$ und $+2,5$ bzw. $-2,5$ und $+1,3$ größer ist als die der Punkte $-1,9$ und $+1,9$. In diesem Falle ist also die Intensität in dem Symmetriepunkte kleiner als in der Umgebung. Setzen wir dagegen die Größe $\frac{1}{2} \sin^2 \Theta \cdot \sqrt{2|b - x_P|} = 2,7$, so erkennt man ebenso, daß jetzt im Symmetriepunkte $x_P = b \cdot \frac{\sin^2 \Theta}{4 + \sin^2 \Theta}$ ein Intensitätsmaximum vorhanden ist.¹⁾

Wir erwähnen noch besonders, daß der Symmetriepunkt, den wir dem Brennpunkte einer Kugelwelle gegenüberstellten, im Innern der Kaustik liegt.

§ 18.

Wir geben den Wert von u_P für die durch den Symmetriepunkt gehende achsensenkrechte Ebene, da diese der durch den Brennpunkt einer Kugelwelle gehenden achsensenkrechten Ebene entspricht. Für diesen Fall wird $H_1 = -H_2$. Es wird demnach $G(H_1) = G(H_2)$; $K(H_1) = K(H_2)$; $D(H_1) = -D(H_2)$; $E(H_1) = -E(H_2)$, so daß sich für diese spezielle ausgezeichnete Ebene ergibt

$$(1) \quad u_P = e^{ikx_P \cdot (1 - \frac{1}{8} \sin^2 \Theta)} \cdot 2 \cdot \{D(H_2) + E(H_2)\},$$

wo $H_2 = \frac{1}{4} \sin^2 \Theta$ und $D(H_2)$ bzw. $E(H_2)$ sich aus (15) bzw. (16) oder (15*) bzw. (16*) des § 14 ergibt.

§ 19.

Bei der allgemeinen Auswertung von (3*) des § 14 hatten wir den Wert $x_P = +b$ ausgeschlossen, um zu erreichen, daß

1) Die Werte $b = 1800 \lambda$; $\sin \Theta = 0,3$, die wir unseren zahlenmäßigen Berechnungen zugrunde legten, entsprechen zufällig dem Falle

$$\frac{1}{2} \sin^2 \Theta \cdot \sqrt{2|b - x_P|} \approx \frac{1}{2} \sin^2 \Theta \cdot \sqrt{2|b|} = 2,7.$$

$\psi = \frac{x_P}{b - x_P}$ endlich bleibt. Wir betrachten jetzt noch diesen Ausnahmefall. Setzen wir in (3*) des § 14 $x_P = +b$, so erhalten wir in derselben Näherung wie oben

$$u_P = u(b, \varrho_P) = ik \cdot e^{ikb} \cdot \int_0^\Theta J_0(k \varrho_P \sin \vartheta) e^{-ik \cdot \frac{1}{2} b \sin^2 \vartheta} \sin \vartheta d\vartheta.$$

Wir setzen $\frac{1}{2} \sin^2 \vartheta = \zeta$ und entwickeln $J_0(k \varrho_P \sin \vartheta) = J_0(k \varrho_P \sqrt{2\zeta})$ nach Potenzen von $k \varrho_P \sqrt{2\zeta}$. Wir erhalten

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} u_P = u(b, \varrho_P) &= ik \cdot e^{ikb} \cdot \sum_0^\infty \left(\frac{1}{n!}\right)^2 \cdot \left(-\frac{k^2 \varrho_P^2}{2}\right)^n \cdot \int_0^Z e^{-ikb\zeta} \cdot \\ &\quad \cdot (1 + \zeta + \frac{3}{2}\zeta^2) \cdot \zeta^n d\zeta, \end{aligned} \right.$$

wo

$$Z = \frac{1}{2} \sin^2 \Theta.$$

Der Formel (1) entspricht für den in § 14 durch $(E, F, G) = (1, 0, 0)$ gekennzeichneten Fall, daß in (3*) des § 14 $d\vartheta$ durch $d(\sin \vartheta) = \cos \vartheta d\vartheta$ ersetzt werden darf, die etwas einfachere Darstellung

$$(1^*) \quad u_P = u(b, \varrho_P) = ik \cdot e^{ikb} \cdot \sum_0^\infty \left(\frac{1}{n!}\right)^2 \cdot \left(-\frac{k^2 \varrho_P^2}{2}\right)^n \cdot \int_0^Z e^{-ikb\zeta} \cdot \zeta^n d\zeta.$$

Wir begnügen uns damit, (1*) genauer auszuwerten, da die Auswertung von (1) in genau derselben Art zu erfolgen hätte. Nun ist — wie man leicht nachprüft —

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} \int_0^Z e^{-ikb\zeta} \cdot \zeta^n d\zeta &= \frac{n!}{(ikb)^n} \cdot \left[\frac{e^{-ikb\zeta}}{-ikb} \cdot e_n(+ikb\zeta) \right]_0^Z \\ &= \frac{n!}{(ikb)^{n+1}} \cdot (1 - e^{-ikbZ} \cdot e_n(+ikbZ)), \end{aligned} \right.$$

wo wieder [vgl. (11) des § 14]

$$(3) \quad e_n(z) = \sum_0^n \frac{z^\mu}{\mu!} [= f_n^*(2z)]; \quad e_0(z) = 1; \quad e_\infty(z) = e^z.$$

Definieren wir noch

$$(4) \quad \hat{e}_n(z) = \sum_n^\infty \frac{z^\mu}{\mu!}; \quad \hat{e}_0(z) = e^z; \quad \hat{e}_\infty(z) = 0,$$

so ist

$$(5) \quad e_n(z) + \hat{e}_{n+1}(z) = e^z,$$

so daß wir statt (2) auch schreiben können

$$(6) \quad \int_0^Z e^{-ikb\zeta} \cdot \zeta^n d\zeta = \frac{n!}{(ikb)^{n+1}} \cdot e^{-ikbZ} \cdot \mathcal{E}_{n+1}(+ikbZ).$$

Für $u_P = u(b, \varrho_P)$ erhalten wir so, wenn wir noch $Z = \frac{1}{2} \sin^2 \Theta$ setzen

$$(7) \quad \begin{cases} u_P = u(b, \varrho_P) = \frac{e^{ikb(1 - \frac{1}{2} \sin^2 \Theta)}}{b} \cdot \sum_0^\infty \frac{1}{n!} \cdot \left(i \cdot \frac{k \varrho_P^2}{2b}\right)^n \\ \cdot \mathcal{E}_{n+1}(+ikb \cdot \frac{1}{2} \sin^2 \Theta). \end{cases}$$

Wir können (7) noch in anderer Form schreiben, wenn wir (2) nicht umformen und beachten, daß

$$(8) \quad \sum_0^\infty \frac{x^n}{n!} \cdot e_{n+m}(y) = \sum_{-m}^{+\infty} \left(-i \sqrt{\frac{x}{y}}\right)^n \cdot J_n(2i\sqrt{xy})$$

ist. Wir erhalten dann

$$(9) \quad \begin{cases} u_P = u(b, \varrho_P) = \frac{e^{ikb}}{b} \\ \cdot \left\{ e^{i \frac{k}{2b} \varrho_P^2} - e^{-i \frac{k b}{2} \sin^2 \Theta} \cdot \sum_0^\infty \left(i \frac{\varrho_P}{b \cdot \sin \Theta}\right)^n \cdot J_n(k \varrho_P \sin \Theta) \right\}. \end{cases}$$

Für $\varrho_P = 0$, also auf der Achse im Punkte $x_P = +b$, folgt hieraus

$$(10) \quad u(b, 0) = \frac{e^{ikb}}{b} \cdot \left\{ 1 - e^{-ikb \cdot \frac{1}{2} \sin^2 \Theta} \right\}.$$

§ 20.

Wir betrachten noch den Fall, daß $|x_P| \gg b$ ist, so daß b gegen x_P vernachlässigt werden kann. Wir beschränken uns auf solche Aufpunkte, die auf der Achse des Strahlenbündels liegen, für welche also $\varrho_P = 0$ ist, und schließen unsere Betrachtungen an (3*) bzw. (7) des § 16 an. Beachten wir, daß wir in erster Näherung bei großen Argumenten von C_u und S_u schreiben dürfen

$$C_u = 0,5 + \frac{1}{\pi u} \cdot \sin \frac{1}{2} \pi u^2; \quad S_u = 0,5 - \frac{1}{\pi u} \cdot \cos \frac{1}{2} \pi u^2,$$

so erhalten wir nach einigen Umformungen aus (3*) oder auch

aus (7) des § 16 sowohl für positive als auch für negative Werte von x_P

$$(u(x_P, 0))_{x_P \gg b} = \frac{e^{ikx_P}}{x_P} \cdot \left(1 - \frac{e^{-ikx_P \left(\frac{1}{2} \sin^2 \Theta + \frac{1}{8} \sin^4 \Theta \right)}}{1 + \frac{1}{2} \sin^2 \Theta} \right),$$

wofür wir in erster Näherung auch schreiben dürfen

$$(u(x_P, 0))_{x_P \gg b} = \frac{1}{x_P} \cdot \left\{ e^{ikx_P} - e^{ikx_P \cdot \cos \Theta} \right\}.$$

Diese Formel stimmt überein mit der von Debye angegebenen Lösung für Aufpunkte, die auf der Achse einer kreiskegelförmig begrenzten Kugelwelle liegen, wie es bei der angegebenen Voraussetzung $|x_P| \gg b$ zu erwarten war.

§ 21.

Unter Benutzung der in den vorhergehenden Paragraphen abgeleiteten Formeln haben wir für ein Strahlenbündel, dessen Wellen- und Brennflächen den Gleichungen (1) und (2) des § 14 genügen, und das durch die Integraldarstellung

$$\begin{aligned} u_P &= \frac{ik}{2\pi} \cdot \int_0^\Theta \int_0^{2\pi} e^{ik \left[x_P \cos \vartheta + y_P \sin \vartheta \cos \varphi + z_P \sin \vartheta \sin \varphi + \frac{1}{8} b \sin^4 \vartheta \right]} \\ &\quad \cdot \cos \vartheta \cdot \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi, \\ &= ik \cdot \int_0^\Theta J_0(k \varrho_P \sin \vartheta) \cdot e^{ik \left[x_P \cos \vartheta + \frac{1}{8} b \sin^4 \vartheta \right]} \cdot \cos \vartheta \cdot \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi \end{aligned}$$

gegeben ist, unter der speziellen Annahme $b = 1800 \lambda$, $\sin \Theta = 0,3$ — was ungefähr einem Achsenwinkel von $17,5^\circ$ (Gesamtöffnung 35°) entspricht — die Intensitätsverhältnisse auf der Achse sowie in verschiedenen achsensenkrechten Ebenen berechnet und in den Figg. 18—28 graphisch dargestellt. Die Fig. 17 gibt uns zunächst nochmals eine Zeichnung der Kaustik (vgl. Fig. 4) unseres Strahlenbündels, und zwar entsprechend unseren speziellen Annahmen $b = 1800 \lambda$; $\sin \Theta = 0,3$.¹⁾ Man erkennt, daß bei dem gewählten Öffnungswinkel die Brennfläche noch vollständig derjenigen ähnlich ist, die einem Rotationsparaboloid als Kennfläche entspricht. Der Einfluß der „sphärischen Korrektur“ (s. o.) macht sich bei dem gewählten b erst bei größerer Öffnung bemerkbar.²⁾ Die in dieser

1) Für $\lambda = 6 \cdot 10^{-5}$ cm wird $b = 1,08$ mm.

2) Vgl. „Zusatz bei der Korrektur“ S. 781 sowie Fig. 37.

Figur gestrichelt gezeichneten achsensenkrechten Linien geben die Lage derjenigen achsensenkrechten Ebenen, für die die Intensität in den Figg. 19—28 dargestellt ist. Die Rand-

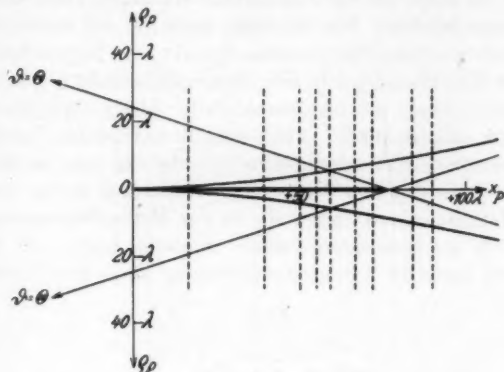


Fig. 17.

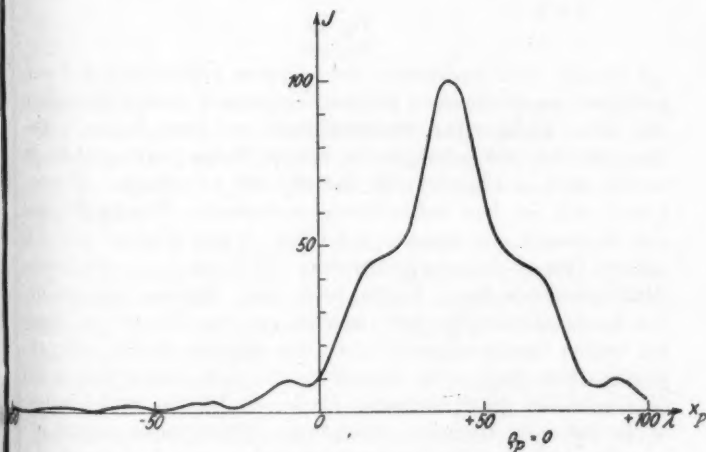


Fig. 18.

strahlen schneiden die Achse des Strahlenbündels in einer Entfernung $x_p = 77,27 \lambda$ von der Spitze der einen Schale der Kaustik, d. h. von dem Brennpunkte der paraxialen Strahlen.

Das Stück der Achse, das zwischen dieser Spitze und dem genannten Schnittpunkt $x_P = 77,27 \lambda$ der Randstrahlen liegt, bildet die zweite (ausgeartete) Schale der Kaustik.

Fig. 18 zeigt uns die Intensitätsverteilung längs der Achse des Strahlenbündels. Wir erkennen zunächst die bereits im § 17 unter Benutzung der Cornuschen Spirale kurz besprochenen allgemeinen Erscheinungen.¹⁾ Der „Symmetriepunkt“, der hier bei $x_P = 39,6 \lambda$ liegt, ist in diesem Falle durch ein Intensitätsmaximum ausgezeichnet. Auch erkennt man seine Eigenschaft als Symmetriepunkt, wenigstens — wie wir bereits oben bemerkten — in gewisser Näherung. Außerdem sehen wir, daß dieses Hauptmaximum ungefähr in der Mitte der ausgearteten Schale der geometrisch-optischen Kaustik liegt. In Fig. 35 haben wir noch die Intensitätsverteilung längs der Achse eines

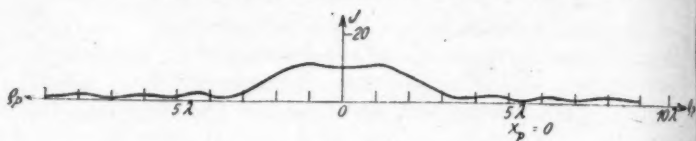


Fig. 19.

sphärischen Strahlenbündels von gleichem Öffnungswinkel aufgetragen, um so gewisse Vergleiche zwischen dem sphärischen und dem asphärischen Strahlenbündel zu ermöglichen. Der Maßstab der Intensität ist in beiden Fällen (und gleichfalls in den übrigen Figg. 19—28 und 31—36) der gleiche. Wir sehen, daß in dem behandelten asphärischen Strahlenbündel das Maximum der axialen Intensität etwas weniger als den halben Betrag der entsprechenden Intensität des sphärischen Strahlenbündels hat. Ferner sehen wir, daß die Entfernung der Intensitätsmaxima und -minima von dem Hauptmaximum bei beiden Strahlenbündeln etwa den gleichen Betrag hat, abgesehen von dem ersten Minimum und dem darauf folgenden Maximum bei der sphärischen Welle, da bei der asphärischen Welle das erste Minimum durch einen Wendepunkt ersetzt ist.

Fig. 19 zeigt die Intensitätsverteilung in der durch die Spitze der Kaustik gehenden achsensenkrechten Ebene. Wir erkennen, daß die Helligkeit in der Mitte, d. h. in der Spitze der Kaustik etwas geringer ist als in deren Umgebung. Der

1) Vgl. hierzu die dortigen Ausführungen.

Unterschied ist jedoch nur sehr gering. Die Intensität nimmt in einiger Entfernung vom Achsenschnittpunkt schnell ab, bleibt dann aber noch auf größere Entfernung hin merklich von Null verschieden. Dies entspricht der Tatsache, daß die Randstrahlen des Bündels diese Ebene erst bei $\varrho = 24,3 \lambda$ schneiden.

In Fig. 20 ist die Intensität in derjenigen achsensenkrechten Ebene dargestellt, die von der Spitze der Kautistik die Entfernung $+16,85 \lambda$ hat (vgl. Fig. 17). Hier ist die Helligkeit in der Mitte, also im Schnitt mit der Achse, am größten, nimmt

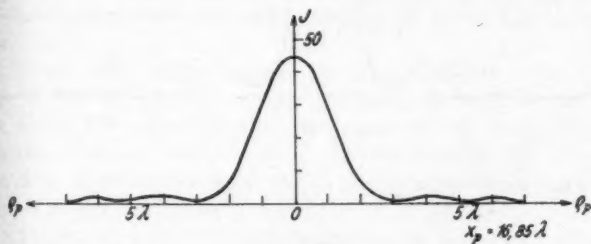
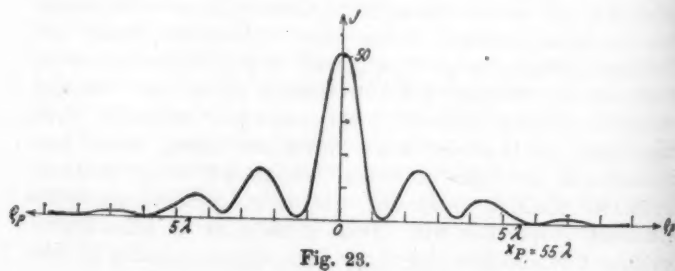
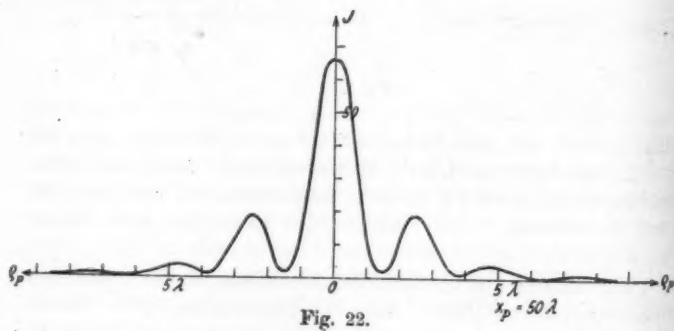
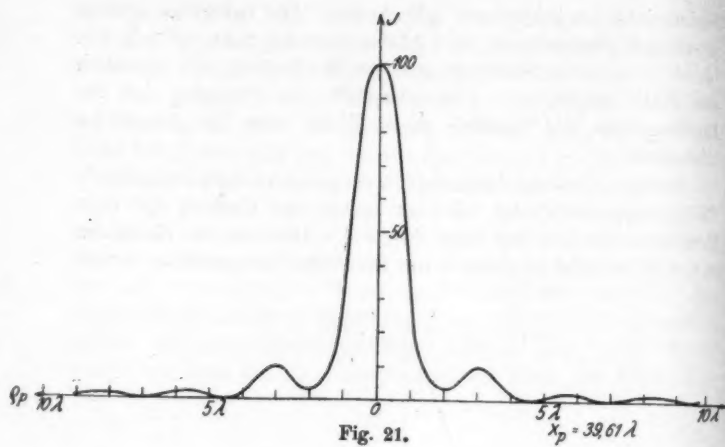


Fig. 20.

dann schnell ab, erreicht bei $\varrho \approx 2,8 \lambda$ ein Minimum, dem bei $\varrho \approx 4 \lambda$ ein kaum merkbares Maximum folgt. Auch hier bleibt die Intensität noch auf größere Entfernung hin merklich von Null verschieden. Die Randstrahlen schneiden diese Ebene bei $\varrho \approx 19 \lambda$.

Fig. 21 gibt uns die Intensitätsverteilung in der durch den Symmetriepunkt (hier: das Hauptmaximum der axialen Intensität) gelegten achsensenkrechten Ebene. Als Vergleich diene Fig. 36, die die Intensitätsverteilung in der entsprechenden achsensenkrechten Ebene einer *sphärischen* Welle, der Brennpunktebene zeigt. Auffallend in Fig. 21 ist besonders, daß sich der Schnitt der betreffenden Ebene mit der geometrisch-optischen Kautistik nicht besonders ausprägt, wenn man nicht die Lage des ersten Nebenmaximums, dessen Entfernung von der Achse etwa dem Schnitt mit der geometrisch-optischen Kautistik entspricht, als deren wellentheoretischen Ausdruck ansprechen will. Doch müssen wir es offen lassen, ob diese Übereinstimmung in der Lage allgemein gültig ist oder



nur
betr

ist,
gilt,
Dies
bei

Pun
Fig.
vorh
gewi
wan

Fig.
der
ausg
mit
Eben

senk
fernu
 $\varrho \approx 2$
Die
schni
 $\varrho =$

verte
senk
erwä
schei
spre

bere
 $x_p =$
habe
der
Figg
tabel
werte

nur als Folge der speziellen Wahl der Werte von b und Θ zu betrachten ist.

Eine Lichtverteilung, die der der vorigen Ebene ähnlich ist, zeigt auch die Fig. 22, die für eine achsensenkrechte Ebene gilt, deren Entfernung von der Spitze der Kaustik 50λ beträgt. Diese Ebene wird von der geometrisch-optischen Kaustik bei $\varrho \approx 4,5 \lambda$, von den Randstrahlen bei $\varrho \approx 8,5 \lambda$ geschnitten.

Auch die Verteilung der Lichtintensität in der durch den Punkt $x_P = 55 \lambda$ gelegten achsensenkrechten Ebene, die durch Fig. 23 dargestellt wird, ist noch ähnlich derjenigen der beiden vorher betrachteten Ebenen. Man erkennt, daß die Intensität gewissermaßen von der Mitte mehr und mehr nach außen wandert.

Einen wesentlich anderen Anblick gewährt schon die Fig. 24, die für diejenige achsensenkrechte Ebene gilt, die von der Spitze der Kaustik etwa 59λ entfernt ist und dadurch ausgezeichnet ist, daß sie durch die Schnittlinie der Kaustik mit dem Randstrahlenkegel geht. Beide schneiden also diese Ebene in der Kreislinie $\varrho \approx 5,75 \lambda$.

Fig. 25 zeigt die Intensitätsverteilung in derjenigen achsensenkrechten Ebene, die von der Spitze der Kaustik die Entfernung $66,76 \lambda$ hat. Sie wird von den Randstrahlen bei $\varrho \approx 3,25 \lambda$ und von der Kaustik bei $\varrho \approx 7 \lambda$ geschnitten. Die Intensität zeigt neben dem Maximum in dem Achsenschnittpunkt noch ein stark ausgeprägtes Maximum bei $\varrho = 4,05 \lambda$.

Fig. 26 endlich gibt uns eine Darstellung der Intensitätsverteilung in der durch den Punkt $x_P = 72 \lambda$ gelegten achsensenkrechten Ebene. Auch hier erkennt man wieder das bereits erwähnte scheinbare Hinauswandern der Intensität, eine Erscheinung, die der geometrisch-optischen Kaustik zu entsprechen scheint.

Außer den ziemlich weit durchgeführten Intensitätsberechnungen der Ebenen $x_P = 0 \lambda$; $x_P = 16,85 \lambda$; $x_P = 39,61 \lambda$; $x_P = 50 \lambda$; $x_P = 55 \lambda$; $x_P = 59 \lambda$; $x_P = 66,76 \lambda$; $x_P = 72 \lambda$ haben wir diese noch für die allernächste Achsenumgebung der Ebenen $x_P = 84 \lambda$; $x_P = 90 \lambda$ durchgeführt und in den Figg. 27 und 28 dargestellt. Wir geben nachfolgend noch eine tabellarische Zusammenstellung der berechneten Intensitätswerte, wobei dem Intensitätsmaximum willkürlich der Wert 100

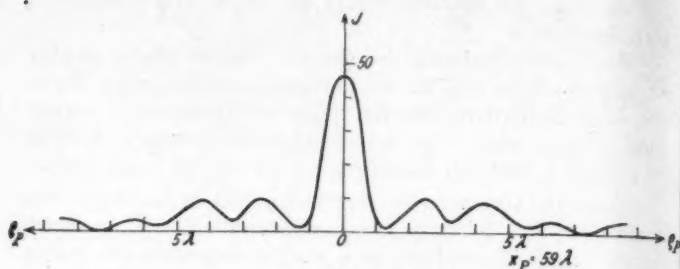


Fig. 24.

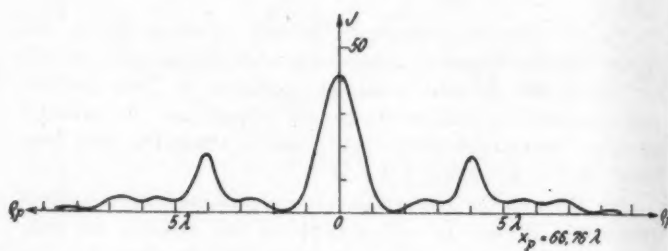


Fig. 25.

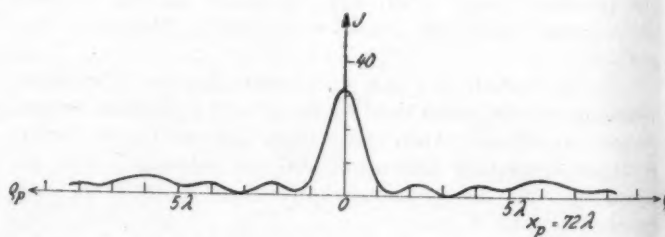


Fig. 26.

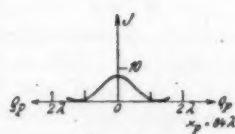


Fig. 27.

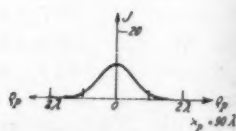


Fig. 28.

zugeordnet wurde. Die Tabelle gibt also die an den einzelnen Punkten $P = (x_P, \varrho_P)$ herrschende Intensität in Prozenten des Intensitätsmaximums. Hierbei ist x_P aus der 1. Zeile der Tabelle zu entnehmen, während $\varrho_P (= n \cdot \frac{\varrho_P}{n}; n = 0, 1, 2, 3, \dots)$ sich ergibt, indem man die in der 2. Zeile stehenden Werte ϱ_P/n mit den in der 1. Spalte stehenden Werten n multipliziert. Die Werte ϱ_P/n — und demnach auch die Werte ϱ_P — wurden so gewählt, daß $\delta = k \varrho_P \cdot \sqrt{2 \psi}$ (das Argument der Besselschen Funktionen) ganzzahlig wurde. Eine Ausnahme hiervon bildet die — durch Einkastelung in der Tabelle hervorgehobene — Ebene $x_P = 0$, bei der wegen $\psi = \frac{x_P}{b - x_P}$ für alle endlichen ϱ_P die Größe δ den Wert 0 hat. Hier ist $\varrho_P = 0, 1, 2, 3, \dots$ gewählt worden. Die Werte x_P und ϱ_P (bzw. ϱ_P/n) sind in Wellenlängen als Maßeinheit angegeben.

Tabelle 5.

$x_P =$	0	16,85	39,61	50	55	59	66,76	72	84	90
$\frac{\varrho_P}{n} =$	1	1,157	0,750	0,666	0,634	0,611	0,575	0,552	0,509	0,491
0	10,2	44,5	100	66,6	50,7	46,3	41,6	31,2	7,8	10,1
1	10,4	24,8	59,2	34,0	24,5	24,2	25,4	17,3	4,3	6,2
2	7,6	3,1	7,3	2,3	0,5	1,3	4,5	3,5	0,4	1,7
3	2,5	1,6	4,0	12,2	9,5	4,9	0,5	1,5	0,9	0,1
4	1,4	1,6	9,8	17,9	15,2	10,1	2,4	3,3	—	—
5	0,8	1,1	4,0	5,4	5,8	4,7	3,2	1,1	—	—
6	0,9	0,5	0,0	1,5	3,9	5,5	4,5	0,3	—	—
7	0,8	—	1,6	3,8	6,9	8,8	17,2	2,4	—	—
8	1,4	—	1,5	2,2	3,6	5,5	5,6	2,6	—	—
9	0,8	—	0,2	0,2	0,4	2,1	3,4	2,5	—	—
10	—	—	0,4	0,2	0,6	3,1	3,3	4,6	—	—
11	—	—	1,2	0,7	1,5	2,1	3,5	5,4	—	—
12	—	—	0,2	0,3	0,3	0,3	3,7	4,1	—	—
13	—	—	0,1	0,0	0,0	2,1	0,9	2,3	—	—
14	—	—	0,2	—	0,1	3,4	1,0	2,5	—	—
15	—	—	0,2	—	—	—	0,6	1,7	—	—

Um einen vollständigen Einblick in die Lichtverhältnisse in der Umgebung der Kaustik zu erhalten, sind unter Benutzung der aus den Figg. 18—28 ablesbaren Intensitätswerte in den Figg. 29 und 30 die „Kurven (Flächen) gleicher Helligkeit“ gezeichnet. Die Lage der geometrisch-optischen Kaustik wurde gleichfalls eingezeichnet. Die beiden Figg. 29 und 30

unterscheiden sich nur dadurch voneinander, daß in Fig. 29 die den Abstand von der Achse des Strahlenbündels angehenden Ordinatenwerte in einer Maßeinheit eingetragen wurde, die gleich ist dem Fünffachen der Maßeinheit der Abszisse, während in der Fig. 30 für Ordinate und Abszisse die gleiche Einheit gewählt wurde. Die Wahl der vergrößerten Ordinateneinheit

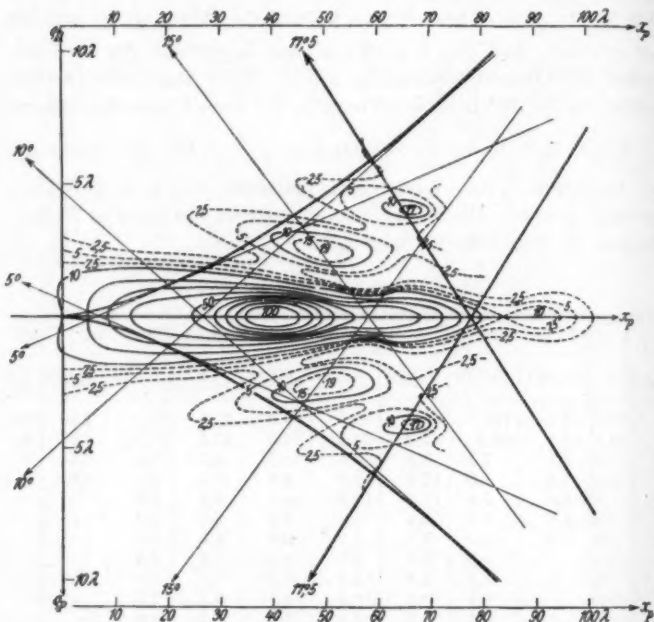


Fig. 29.

in Fig. 29 war notwendig, um die Lichtverhältnisse übersichtlicher darstellen zu können.

Wir ersehen aus den Figuren, die wir um die Abszissenachse rotiert zu denken haben, daß die Intensität vom Hauptmaximum, das auf der Achse des Strahlenbündels etwa in der Mitte der ausgearteten Kaustik liegt, nach allen Richtungen hin abfällt, und zwar besonders stark in Richtung senkrecht zur Achse des Bündels. Hier fällt es auf einer Strecke von etwa 1,5 bis 2 Wellenlängen von 100 Proz. auf ungefähr 3 Proz.,

um dann jedoch wieder auf ungefähr 19 Proz. anzuwachsen.

Dieser Ring eines relativen Intensitätsmaximums liegt bei $x_P = 50 \lambda$; $\varrho_P = 2,5 \lambda$. Ein zweiter Ring eines relativen Intensitätsmaximums liegt bei $x_P = 66 \lambda$; $\varrho_P = 4 \lambda$. Hier steigt die Intensität auf 17 Proz. Ein besonders auffallendes Ergebnis, auf das wir besonders hinweisen wollen, ist es, daß sich die *geometrisch-optische Kaustik* in der *wellentheoretischen Betrachtung* fast gar nicht bemerkbar macht. Der einzige Hinweis auf sie scheint darin zu bestehen, daß die Verbindungslinie der beiden Nebenmaxima sowie des auf der Achse liegenden Wendepunktes der geometrisch-optischen Kaustik ungefähr parallel läuft.

Unsere Darstellung der „Kurven (Flächen) gleicher Helligkeit“ gestattet es auch sehr leicht, die Lichtverteilung längst eines geometrisch-optischen Lichtstrahles zu entnehmen. Wir haben dies für diejenigen Lichtstrahlen getan, die mit der Achse die Winkel 5° ; 10° ; 15° ; $17,5^\circ$ bilden, und die Ergebnisse in den Figg. 31 bis 34 dargestellt. Die Abszisse gibt die auf den Strahlen von der Kaustik ab gemessene Entfernung, positiv gerechnet in der dem einfallenden Lichte entgegengesetzten Richtung, während die Ordinate wieder die Intensität in gleichem Maßstabe wie oben angibt.

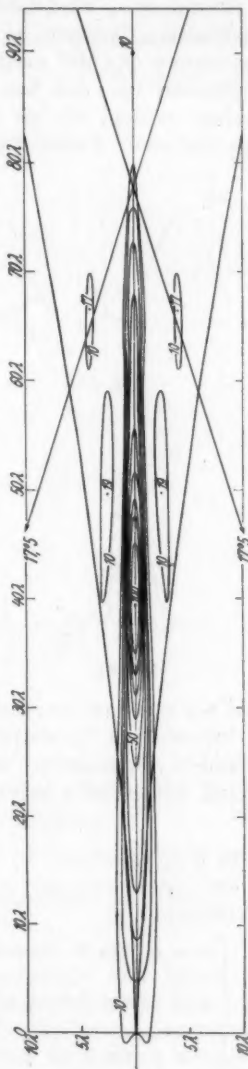


Fig. 30.

Beachten wir, daß ein Lichtstrahl, der mit der Achse des Bündels einen Winkel ϑ bildet, wobei $0 \leq \vartheta \leq \Theta$ ist, in zwei verschiedenen Punkten von den beiden Kaustikschalen — der ausgearteten und der nicht ausgearteten — geschnitten wird, so erkennen wir, daß hier die Verhältnisse etwa denen entsprechen werden, wie sie in § 11 erörtert und durch Fig. 11 dargestellt sind. Unsere Figg. 31—34 bestätigen diesen Schluß,

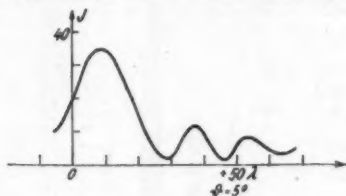


Fig. 31.

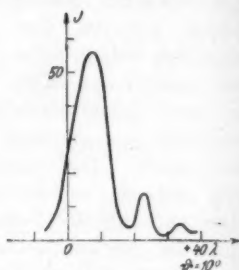


Fig. 32.

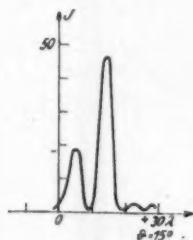


Fig. 33.

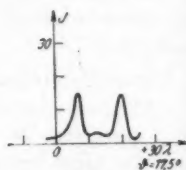


Fig. 34.

wobei wir noch zu beachten haben, daß bei geringer Neigung des betrachteten Lichtstrahls gegen die Achse des Bündels die beiden „Brennlinien“ (vgl. § 1, S. 694, Anm. 2) geringen Abstand voneinander haben.

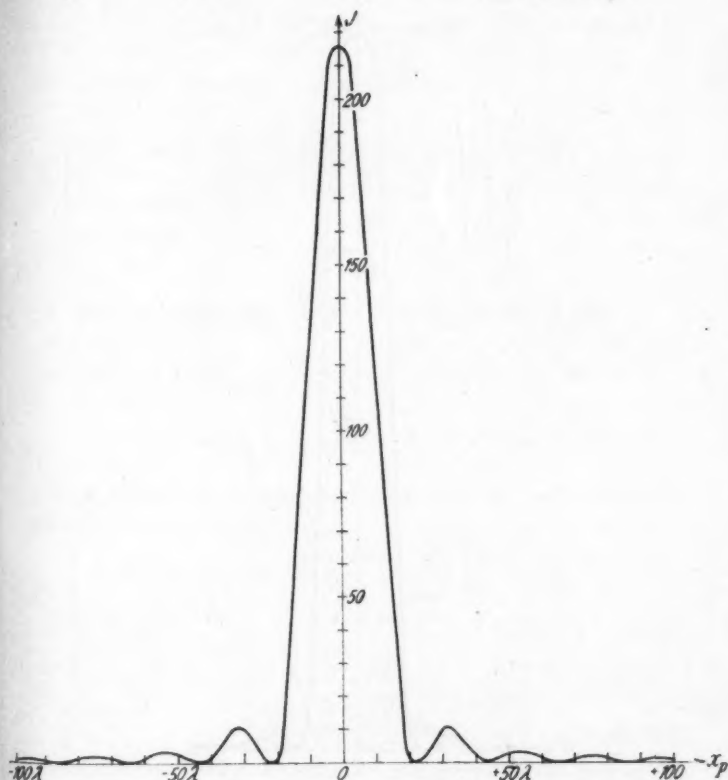
§ 22.

In § 7, Gleichung (6) hatten wir die Integraldarstellung für ein Strahlenbündel gegeben, dessen Wellenflächen den Gleichungen

$$(1) \quad \begin{cases} x = a \cdot \cos \vartheta \cdot \left[\text{const} + \cos 2\varphi \left(1 - \frac{1}{\cos \vartheta} \right) \right], \\ y = a \cdot \sin \vartheta \cos \varphi \cdot \left[\text{const} + 1 + 2 \cdot \sin^2 \varphi \cdot \lg^2 \frac{\varphi}{2} \right], \\ z = a \cdot \sin \vartheta \sin \varphi \cdot \left[\text{const} - 1 - 2 \cdot \cos^2 \varphi \cdot \lg^2 \frac{\varphi}{2} \right] \end{cases}$$

genügen. Die betreffende Integraldarstellung lautete:

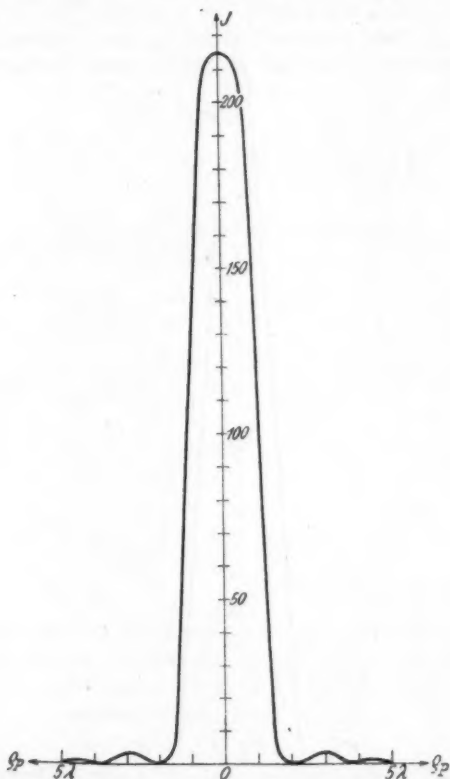
$$(2) \left\{ u_P = \frac{ik}{2\pi} \cdot \iint_0^{2\pi} e^{ik[x_P \cos \vartheta + y_P \sin \vartheta \cos \varphi + z_P \sin \vartheta \sin \varphi - a \cdot \cos 2\varphi (1 - \cos \vartheta)]} \sin \vartheta d\vartheta d\varphi. \right.$$



Kugelwelle; $\sin \Theta = 0,8$; $\varphi_P = 0$.
Fig. 85.

Das Strahlenbündel ist ein astigmatisches. Die beiden Brennpflächen haben auf der Achse des Bündels ($\vartheta = 0$) den Abstand $2a$. Der Koordinatenursprung des zugrunde gelegten Systems liegt in der Mitte zwischen den beiden Brennpflächen.

Wir sahen, daß bei kleinen Werten von Θ , d. h. bei geringer Öffnung des Strahlenbündels, dieses in erster Näherung mit dem in § 1 behandelten astigmatischen Bündel, das in zwei



Kugelwelle; $\sin \Theta = 0,3$; $x_P = 0$.

Fig. 36.

Brennlinien konvergiert, übereinstimmt. Da sich (2) für auf der Achse des Bündels liegende Aufpunkte ($y_P = z_P = 0$) ohne irgendeine Vernachlässigung leicht auswerten läßt, so soll dies nachfolgend geschehen.

Wir erhalten:

$$(3) \left\{ \begin{aligned} u_P = u(x_P, 0, 0) &= \frac{ik}{2\pi} \cdot \int_0^{\Theta} \int_0^{2\pi} e^{ik[x_P \cos \vartheta - a \cdot \cos 2\varphi (1 - \cos \vartheta)]} \sin \vartheta d\varphi d\vartheta \\ &= ik \cdot \int_0^{\Theta} J_0(ka(1 - \cos \vartheta)) \cdot e^{ikx_P \cos \vartheta} \sin \vartheta d\vartheta. \end{aligned} \right.$$

Wir setzen $(1 - \cos \vartheta) = \eta$. Dann wird

$$(3^*) \left\{ \begin{aligned} u_P = u(x_P, 0, 0) &= ik \cdot e^{ikx_P} \cdot \int_0^H J_0(ka\eta) \cdot e^{ikx_P \eta} d\eta \\ &= ik \cdot e^{ikx_P} \cdot \sum_0^{\infty} \frac{(-\frac{1}{2}ka^2)^n}{(n!)^2} \cdot \int_0^H e^{-ikx_P \eta} \cdot \eta^{2n} d\eta. \end{aligned} \right. \quad H = 1 - \cos \Theta$$

Nun ist wieder wie oben (Gleichung (6) des § 19)

$$\begin{aligned} \int_0^H e^{-ikx_P \eta} \eta^{2n} d\eta &= \frac{(2n)!}{(ikx_P)^{2n+1}} \cdot e^{-ikx_P H} \cdot \hat{e}_{2n+1} (+ikx_P H) \\ &= \frac{(2n)!}{(ikx_P)^{2n+1}} \cdot \{1 - e^{-ikx_P H} \cdot e_{2n} (+ikx_P H)\}. \end{aligned}$$

Für $u_P = u(x_P, 0, 0)$ erhalten wir demnach die beiden einander gleichen Darstellungen

$$(4) \left\{ \begin{aligned} u_P = u(x_P, 0, 0) &= \frac{e^{ikx_P \cdot \cos \Theta}}{x_P} \cdot \sum_0^{\infty} \frac{n!!}{n!} \cdot \left(\frac{a^2}{2x_P^2}\right)^n \\ &\quad \cdot \hat{e}_{2n+1} (+ikx_P (1 - \cos \Theta)) \\ (4^*) \left\{ \begin{aligned} &= \frac{e^{ikx_P}}{x_P} \cdot \sum_0^{\infty} \frac{n!!}{n!} \cdot \left(\frac{a^2}{2x_P^2}\right)^n \\ &\quad \cdot \{1 - e^{ikx_P (1 - \cos \Theta)} \cdot e_{2n} (+ikx_P (1 - \cos \Theta))\}. \end{aligned} \right. \end{aligned} \right.$$

Der Quotient zweier aufeinander folgender Glieder der in (4) auftretenden Summe hat für $n \rightarrow \infty$ den Betrag

$$\frac{a^2}{2} \cdot \frac{2n+1}{(n+1)(2n+2)(2n+3)} \rightarrow 0.$$

Die Summe konvergiert also überall.

Daß (4) auch trotz des im Nenner auftretenden x_P für $x_P = 0$ endlich bleibt, erkennt man leicht daran, daß die in der Summe auftretende Funktion $\hat{e}_{2n+1} (+ikx_P (1 - \cos \Theta))$

den Index $(2n+1)$ trägt, was besagt, daß in ihr das Argument, also auch x_P , in keiner niedrigeren als der $(2n+1)$ -Potenz auftritt, in Übereinstimmung mit der gesamten Nennerpotenz von $u_P = u(x_P, 0, 0)$. Wir erhalten so für $u(0, 0, 0)$ den Ausdruck

$$(5) \quad u(0, 0, 0) = i k H \cdot \sum_0^{\infty} (-1)^n \cdot \left(\frac{k a H}{2}\right)^{2n} \cdot \frac{1}{(n!)^2} \cdot \frac{1}{2n+1}$$

übereinstimmend mit demjenigen, der sich direkt aus (3*) für $x_P = 0$ ergibt. Statt (5) können wir auch schreiben

$$(5^*) \quad u(0, 0, 0) = \frac{2i}{a} \cdot \sum_0^{\infty} J_{n+1}(k a H); \quad H = 1 - \cos \Theta.$$

In Analogie zu (5) läßt sich die für beliebige Achsenpunkte geltende Formel (4) auch schreiben in der Form

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} u(x_P, 0, 0) &= i k H \cdot e^{i k x_P \cdot \cos \Theta} \cdot \sum_0^{\infty} (-1)^n \cdot \left(\frac{k a H}{2}\right)^{2n} \cdot \frac{1}{(n!)^2} \\ &\quad \cdot \frac{1}{2n+1} \cdot M_{2n+1}(+i k x_P H), \end{aligned} \right.$$

wo

$$\begin{aligned} M_n(z) &= 1 + \frac{z}{n+1} + \frac{z^2}{(n+1)(n+2)} + \frac{z^3}{(n+1)(n+2)(n+3)} + \dots \\ &= n! \cdot \sum_0^{\infty} \frac{z^\mu}{(n+\mu)!} \end{aligned}$$

und $H = 1 - \cos \Theta$.

Zusammenfassung.

In der Arbeit wird zunächst für ein spezielles astigmatisches Strahlenbündel, das in zwei Brennpunkten konvergiert, und das man als Annäherung eines beliebigen unendlich schmalen Bündels auffassen kann, eine mathematisch strenge Lösung der Schwingungsgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$; $\left(k = \frac{2\pi}{\lambda}\right)$ gegeben. Die Herleitung der Lösung schließt sich an eine Arbeit von Debye an, in der eine Lösung der Schwingungsgleichung für ein stigmatisches Bündel gegeben wird. Im folgenden Paragraphen wird der Übergang zur Zylinderwelle vollzogen, indem die eine der beiden Brennpunkten in das Unendliche verlegt wird.

Im § 3 wird gezeigt, daß jedes beliebige Strahlenbündel sich als ein Integralausdruck über ebene Wellen darstellen

läßt. Ist das betrachtete Strahlenbündel durch eine seiner geometrisch-optischen Wellenflächen $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(v, w)$ gegeben, deren Normalen $\mathfrak{N} = \mathfrak{N}(v, w)$ sind, und deren Krümmungsmaß $K = K(v, w)$ ist; ist ferner \mathfrak{x}_P der den Aufpunkt angehende Vektor, so lautet die hergeleitete Formel, aus der sich die Lichterscheinungen im Aufpunkte P ergeben,

$$u_P = \frac{ik}{2\pi} \cdot \int e^{ik(\mathfrak{x}_P - \mathfrak{x}(v, w), \mathfrak{N}(v, w))} \psi(v, w) \cdot K(v, w) dv dw,$$

wo die Integration über den im geometrisch-optischen Sinne belichteten Teil der gegebenen Wellenfläche, der „Kennfläche des Strahlenbündels“, zu erstrecken ist. Die reelle Funktion $\psi(v, w)$ hängt von der Intensitätsverteilung auf der unendlich fernen Wellenfläche ab.

Im § 4 wird das Resultat des vorigen Paragraphen auf den ebenen Fall spezialisiert und nachgewiesen, daß unser Ausdruck mit dem von Debye und Fischer für eine astigmatische Zylinderwelle angegebenen Integralausdruck übereinstimmt, der von der Gestalt der Kaustik bzw. deren Gleichung ausgeht.

Im folgenden Paragraphen wird sodann für das räumliche Strahlenbündel noch eine zweite Lösung gegeben, die der von Debye und Fischer für den ebenen Fall gegebenen analog ist und wie diese nicht die Gleichung der Kennfläche, sondern die der geometrisch-optischen Kaustik als bekannt voraussetzt. Die diesbezügliche Formel lautet:

$$u_P = \frac{ik}{2\pi} \cdot \iint e^{ik[(\mathfrak{x}_P - \mathfrak{y}(v, w), \mathfrak{N}(v, w)) + s^*(v, w)]} \cdot \psi(v, w) \cdot \left[\left| \frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial v}, \frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial w} \right| \right] dv dw,$$

$$u_P = \frac{ik}{2\pi} \cdot \iint e^{ik[r'_P \cdot (\cos \vartheta'_P \cdot \cos \vartheta + \sin \vartheta'_P \cdot \sin \vartheta \cdot \cos(\varphi'_P - \varphi)) + s^*]} \cdot \psi(\vartheta, \varphi) \sin \vartheta d\vartheta d\varphi.$$

Hierin bedeutet \mathfrak{x}_P wieder den Aufpunktsvektor, $\mathfrak{y}(v, w)$ den Vektor, der zu den einzelnen Punkten der einen Schale der geometrisch-optischen Kaustik gehört, $\mathfrak{N}(v, w)$ die Lichtstrahlen, die die Kaustikschale $\mathfrak{y} = \mathfrak{y}(v, w)$ im Punkte (v, w) berühren, $s^* = s^*(v, w) = s^*(\vartheta, \varphi)$ die Bogenlänge der durch Berührungspunkt und Richtung der Lichtstrahlen gegebenen geodätischen Linien der Kaustikschale $\mathfrak{y} = \mathfrak{y}(v, w)$, gerechnet von einer beliebigen, die ganze Schar der betreffenden geodätischen Linien orthogonal schneidenden Kurve. Die Werte $(\cos \vartheta, \sin \vartheta \cos \varphi, \sin \vartheta \sin \varphi)$ sind die Richtungskosinus der

Lichtstrahlen, $(r_P', \vartheta_P', \varphi_P')$ die Polarkoordinaten des Aufpunktes P , bezogen auf ein Koordinatensystem, dessen Ursprungspunkt in dem Punkte der Kaustikschale liegt, in dem diese von dem zum Wertepaare (ϑ, φ) gehörigen Lichtstrahl berührt wird, und das aus dem ursprünglichen Koordinatensystem (r, ϑ, φ) durch Parallelverschiebung hervorgeht. Die Integration ist wieder auszuführen über den ganzen dem geometrisch-optischen Strahlenbündel entsprechenden Bereich der Integrationsvariablen.

Im § 6 wird gezeigt, daß sich jede Integraldarstellung der Form

$$\iint e^{ik[x_P \cdot \alpha(v, w) + y_P \cdot \beta(v, w) + z_P \cdot \gamma(v, w) - f(v, w)]} \cdot \psi(v, w) dv dw,$$

wo

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1; \quad f(v, w) \text{ und } \psi(v, w) \text{ reell,}$$

die die allgemeine Lösung der Schwingungsgleichung ist, eindeutig einem geometrisch-optischen Problem zuordnen läßt. Es werden Gleichungen angegeben, die diese Zuordnung für jeden gegebenen Fall gestatten.

In den folgenden Paragraphen werden verschiedene aus der allgemeinen Formel folgende Darstellungen spezieller Strahlenbündel angegeben und diese sowie auch die allgemeine Formel näher physikalisch diskutiert. Es zeigt sich u. a., daß sich die Lichtverhältnisse in einem Punkte näherungsweise ergeben, wenn man die durch ihn hindurchgehenden geometrisch-optischen Lichtstrahlen zur Interferenz bringt. Ferner, daß jeder Lichtstrahl in der Umgebung einer jeden der beiden vorhandenen Brennflächen eine anomale Phasenänderung vom Betrage $\pi/2$ erleidet, so daß sich bei der Kugelwelle, bei der beide Brennflächen in einen gemeinsamen Brennpunkt ausarten, die anomale Phasenänderung (der „Phasensprung“) π ergibt. Der Zusammenhang zwischen der Lichtintensität und dem oben angegebenen Werte u_P wird diskutiert und gezeigt, daß die Intensität bei nicht zu weit geöffneten Bündeln in erster Näherung dem Quadrat von u_P proportional ist. Auf die in der Nachbarschaft der Kaustik vorhandenen Nebenskaustiken wird hingewiesen. Einige graphische Darstellungen der Lichtverhältnisse in der Umgebung der Brennflächen — sogenannte „Lichtgebirgsquerschnitte“ — die unter Benutzung der auch bei den theoretischen Untersuchungen zugrunde ge-

legten Cornuschen Spirale hergestellt wurden, veranschaulichen die Verhältnisse.

Einige der speziellen Integralausdrücke, die allgemeineres Interesse besitzen, werden durch entsprechende Summen ausgewertet. Auf Grund verschiedener numerischer Durchrechnungen, zu deren Bewältigung zweckentsprechende Tabellen aufgestellt werden, werden auch hierfür eine Anzahl graphischer Darstellungen gegeben, die die verschiedenen Lichtverhältnisse veranschaulichen und die näher diskutiert werden.

Es sei mir gestattet, meinem hochverehrten Lehrer, Hrn. Professor Dr. M. v. Laue, meinen ergebensten und herzlichsten Dank auszusprechen für die Anregung zu dieser Arbeit und die Unterstützungen, die er mir nicht allein in wissenschaftlicher, sondern auch ganz besonders in persönlicher Hinsicht hat zuteil werden lassen.

Ferner gebührt mein Dank dem Kaiser Wilhelm Institut für Physik, das mir für die weitere Ausarbeitung der Preisarbeit Geldmittel zur Verfügung stellte, sowie dem Direktor des Preussischen Geodätischen Institutes zu Potsdam, Hrn. Wirkl. Admiralitätsrat Professor Dr. E. Kohlshütter, für die freundliche Erlaubnis, die Hilfsmittel des Institutes zu benutzen.

Hr. stud. phil. Fr. Bolle unterstützte mich bei den numerischen Berechnungen, wofür ich ihm gleichfalls danke.

Potsdam, im Februar 1925.

Zusatz bei der Korrektur.

In der geometrischen Optik ist es gebräuchlich, für die Beurteilung der Güte eines optischen Linsensystems dessen „Kurve der sphärischen Längsaberration“ anzugeben. Für das den Figg. 17—34 zugrunde liegende Strahlenbündel war die „sphärische Längsaberration“ gleich $\frac{b}{2} \cdot \sin^2 \vartheta \cos \vartheta$ [vgl. § 14 Gleichung (2)]. Die zugehörigen numerischen Werte sind, wenn wir noch $\lambda = 6 \cdot 10^{-5}$ cm setzen, für

$\vartheta = 0^\circ$	0,000 mm
5°	0,004 „
10°	0,016 „
15°	0,035 „

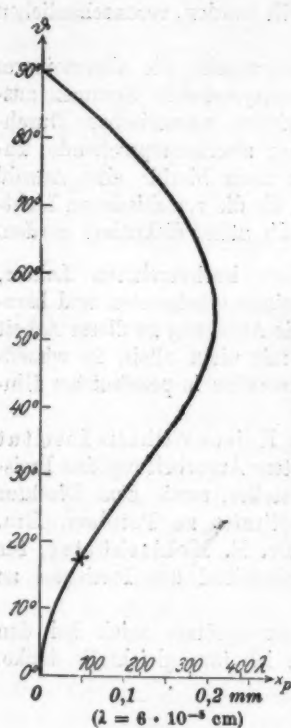


Fig. 37.

$\theta = 17,5^\circ$	0,046 mm
20°	0,059 "
30°	0,116 "
40°	0,171 "
50°	0,204 "
60°	0,202 "
70°	0,182 "
80°	0,091 "
85°	0,046 "
90°	0,000 "

Die Fig. 37 stellt die Kurve der sphärischen Längsaberration dar, wobei als Abszisse der Wert der Längsaberration sowohl in Millimetern als auch in Wellenlängen angegeben ist, der zu den einzelnen geometrisch-optischen Lichtstrahlen gehört, dessen Achsenwinkel als Ordinate aufgetragen wurde. Für eine Gesamtöffnung vom Achsenwinkel $17,5^\circ$, wie sie den Figg. 17—34 entspricht, kommt nur derjenige Teil der Aberrationskurve in Frage, der sich vom Nullpunkt bis zu der durch ein Kreuz gekennzeichneten Stelle erstreckt.

(Eingegangen am 25. Juni 1925.)

≡ Pfeiffer's ≡

Neu! D.R.P. angem. **Neu!**
Ganz aus Stahl!



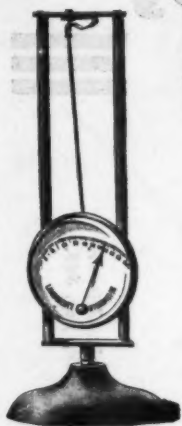
Literatur:
 STINTZING, Phys. Zeitschr. 1922, pag. 463; Zeitschr.
 f. techn. Physik 1922, Nr. 12, pag. 369.

Quecksilber-Dampfstrahlpumpe

Saugleistung:
15 Liter auf Aussetzen jeder
 Entladung in **10 Sekunden**
 vom Vorvakuum ab.

Listen von Abtlg. „A“ anfordern

Arthur Pfeiffer, Wetzlar 1



Original Lambrechts Hygrometer

für

Demonstrationszwecke

Man verlange Prospekt 593

Gegr.



1859

Wilh. Lambrecht A.-G., Göttingen



Hartmann & Braun ^{A-C}
Frankfurt a. M.

R2



Vibrations-Galvanometer

für

10 bis 5000

Perioden

und

Hochspannungs-
Meßbrücken

nach

Scherling und Schmidt



(Physikalisch-Technische Reichsanstalt)

Man verlange Liste 30e



Wagen und Gewichte

mit höchster Empfindlichkeit in hochfein. Ausstattung

Analysenwagen

Mikrowagen

Apothekerwagen

Präzisionswagen

*

Gegründet 1870

Telephon - Nr. 129

Telegr.-Adresse:
Sartoriuswerke



Kaufen Sie
keine Wage
ohne die
Sartorius-
Reitersicherung

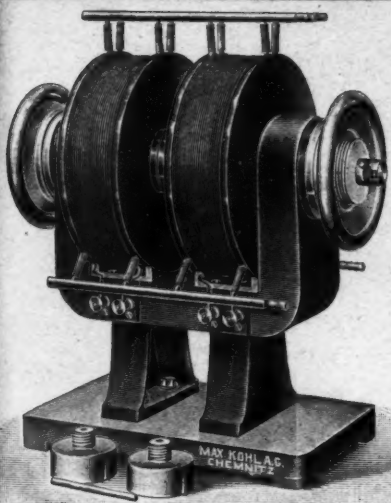
Geschützt durch
D. R. P. 402191

*

Katalog

Präcis 6

kostenfrei



Elektromagnet nach Weiß
mit wassergekühlten Spulen

Max Kohl

Aktiengesellschaft

Chemnitz 2

■

Physikalische
Apparate

Hörsaal- und
Laboratorien-
Einrichtungen

Funken-
Induktoren

■

Sonderlisten auf Verlangen

HOCHVAKUUM- DIFFUSIONSPUMPE

aus Metall
nach Professor GAEDE

D. R. P. und Auslandspatente



Saugleistung: 15 Liter per Sekunde
Vorrakuum: 20 mm

Vergl. Zeitschrift für technische Physik,
Jahrg. 1923, Nr. 10

*

Alleinige Hersteller:

E. Leybold's Nachfolger A.-G.

Köln a. Rhein · Brüderstraße 7

Sonderliste auf Wunsch!

Metzger & Wittig, Leipzig.

